Emanuele Pardini

Istituzioni di Analisi Matematica

Dalle lezioni del corso di Istituzioni di Analisi Matematica tenuto dal prof. Pietro Majer all'Università di Pisa nell'anno accademico 2022/23.

Indice

Introduzione e Ringraziamenti

Le seguenti dispense sono frutto della liberissima rielaborazione delle lezioni di Istituzioni di Analisi Matematica tenute dal prof. Pietro Majer all'Università di Pisa nell'anno accademico 2022/2023. Per il 99% gli argomenti e le dimostrazioni date sono esattamente quelle fatte a lezione, alcune parti indicate sono facoltative in quanto non fatte a lezione e/o lasciate come esercizio (invito comunque alla lettura di queste parti per raggiungere la piena comprensione degli argomenti trattati). L'ordine in cui sono presentati gli argomenti non è quello scelto dal prof. Majer durante il corso, ho preferito rielaborare gli appunti col fine di dare un ordine personale (che non vuole essere migliore) alle idee che sono state presentate.

Fatta questa breve introduzione passiamo ai ringraziamenti: devo ringraziare innanzitutto il professor Pietro Majer per aver costruito il bellissimo corso su cui queste dispense si basano ed i miei compagni Alessando Vegnuti e Sebastian Camponovo per l'aiuto che mi hanno dato nella stesura di alcune parti di queste dispense. Ringrazio inoltre Tommaso Faustini e Andrea Tedesco per l'attenta lettura in fase di stesura e per la loro prontezza nel comunicarmi vari errori e imprecisioni.

Buona lettura.

1

Spazi Normati e di Banach

1.1 Spazi Normati

Definizione 1.1.1: Uno spazio *spazio normato* su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è una coppia $(E, \|.\|)$, in cui E è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\|.\|$ è una *norma* su E, cioè una funzione $\|.\| : E \to [0, +\infty)$ t.c.

(1) $\|x\| \geq 0 \ \ \forall x \in E$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0 \in E$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \ \forall x \in E \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$;

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in E$.

Osservazione 1.1.2: Uno spazio normato $(E, \|.\|)$ ha una naturale struttura di spazio metrico con distanza $d : E \times E \to [0, +\infty)$ data da

$$d(x, y) = \|x - y\| \ \ \forall x, y \in E.$$

Proposizione 1.1.3: *Sia* $(E, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato allora le operazioni di somma tra vettori, il prodotto per scalari e la norma sono applicazioni continue.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda la norma si ha

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

ossia

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

da cui segue

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque è 1-lipschitziana. Per il prodotto per scalari abbiamo

$$\|tx - t_0 x_0\| \leq \|tx - tx_0\| + \|tx_0 - t_0 x_0\| \to 0 \text{ per } t \to t_0 \ \text{ e } \ x \to x_0.$$

Mentre per la somma

$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \longrightarrow 0 \ \text{ per } x \to x_0 \text{ e } y \to y_0.$$

□

Proposizione 1.1.4: *Tutte le norme su uno spazio vettoriale di dimensione finita V su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sono equivalenti, cioè inducono su V la stessa topologia.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Sia $\{e_1, ..., e_n\}$ una base di V. Ogni $x \in V$ è scrivibile in modo unico come $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ con $\{a_i\}_{i=1,...,n} \subset \mathbb{K}$. Definiamo su V la norma (facili verifiche)

$$\|x\|_0 = \sum_{i=1}^n |a_i| \text{ in cui } x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \ \ \forall x \in V.$$

Dimostriamo che ogni altra norma $\|.\|$ su V è equivalente a $\|.\|_0$. Osserviamo che se $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ si ha

$$\|x\| \leq (\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|) \sum_{i=1}^n |a_i| = (\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|)\|x\|_0$$

cioè $\|.\| \leq M\|.\|_0$ con $M = \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|$. Adesso consideriamo $S = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n |a_i| = 1\}$ e la funzione

$$S \ni (a_1, ..., a_n) \overset{\phi}{\longmapsto} \|a_1 e_1 + ... + a_n e_n\|.$$

Notiamo che S è chiuso e limitato rispetto alla topologia euclidea su $\mathbb{K}^n$, inoltre ϕ è continua e positiva su S, dunque vi ammette minimo $m > 0$. Dunque se $x \in V \setminus \{0\}$ e $\frac{x}{\|x\|_0} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ abbiamo $(a_1, ..., a_n) \in S$ e

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_0} \right\| = \phi((a_1, ..., a_n)) \geq m \ \ \forall x \in V \setminus \{0\}$$

da cui segue

$$\|x\| \geq m\|x\|_0 \ \ \forall x \in V$$

perché per $x = 0$ vale l'uguaglianza. □

Proposizione 1.1.5: *Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ due spazi normati ed $L : E \to F$ un operatore lineare. Sono equivalenti:*

(1) L è localmente limitata in $0 \in E$, cioè $\exists\varepsilon > 0\ \exists C \geq 0$ t.c. $\|Lx\|_F \leq C\ \ \forall x \in B(0, \varepsilon)$;

(2) L è continua in 0;

(3) L è lipschitziana.

Dimostrazione. Se vale (1) allora per ogni $x \in E\setminus\{0\}$ si ha $\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_E} \in B(0, \varepsilon)$ in quanto $\left\|\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque $\left\|L\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq C$ e

$$\|Lx\|_F \leq \frac{2C}{\varepsilon}\|x\|_E$$

ma questo, essendo L lineare, implica (3) che implica (2) banalmente che a sua volta implica (1) sempre banalmente. □

Definizione 1.1.6: Siano $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ due spazi normati. Definiamo lo spazio

$$\mathrm{L}(E, F) = \{T : E \to F \mid T \text{ lineare e continua}\}.$$

e data $L \in \mathrm{L}(E, F)$ definiamo la *norma operatoriale* di L come

$$\|L\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} = \max_{\|x\|_E=1} \|Lx\|_F.$$

Inoltre denoteremo $\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(E, E)$. Un operatore lineare continuo è detto *limitato.*

Proposizione 1.1.7: *Siano* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *due spazi normati. La norma operatoriale su* $\mathrm{L}(E, F)$ *è effettivamente una norma. Dunque* $(\mathrm{L}(E, F), \|.\|_{op})$ *è uno spazio normato.*

Dimostrazione. Facili verifiche. □

Definizione 1.1.8: Sia $(X, \|.\|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, definiamo il suo *duale topologico* come

$$X^* = \{\phi : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \phi \text{ lineare e continua}\}.$$

Per $x \in X$ e $\phi \in X^*$ adotteremo la notazione

$$\langle \phi, x \rangle = \phi x.$$

E definiamo su X^* la *norma duale* come

$$\|\phi\|_* = \|\phi\|_{X^*} = \|\phi\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \phi, x \rangle| \ \ \forall \phi \in X^*.$$

Osservazione 1.1.9: Nel contesto della definizione precedente la coppia $(X^*, \|.\|_{X^*})$ forma uno spazio normato.

Definizione 1.1.10: Sia $(X, \|.\|)$ uno spazio normato. Talvolta nel seguito useremo la seguente notazione per indicare le palle unitarie di X

$$B_E = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$$
$$\overline{B}_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Proposizione 1.1.11: *Se* $(X, \|.\|_X)$ *e* $(Y, \|.\|_Y)$ *sono spazi normati e definiamo su* $X \times Y$ *la norma* $\max(\|x\|_X, \|y\|_Y)$ *per ogni* $(x, y) \in X \times Y$*. Vale che* $(X \times Y)^*$ *è linearmente isometrico a* $X^* \times Y^*$ *su cui è definita la norma* $\|f\|_{X^*} + \|g\|_{Y^*}$ *per ogni* $(f, g) \in X^* \times Y^*$*. In particolare lo è tramite* $\Psi : X^* \times Y^* \longrightarrow (X \times Y)^*$ *t.c.*

$$\Psi(f, g) = f + g \ \ \forall (f, g) \in X^* \times Y^*.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Consideriamo la funzione lineare $\Phi : (X \times Y)^* \longrightarrow X^* \times Y^*$ t.c.

$$\Phi(f) = (f(.,0), f(0,.)) \ \ \forall f \in (X \times Y)^*.$$

Questa è bigettiva ed un'inversa (facili verifiche) è data da $\Psi : X^* \times Y^* \longrightarrow (X \times Y)^*$ t.c.

$$\Psi(f, g) = f + g \ \ \forall (f, g) \in X^* \times Y^*.$$

Vediamo che sono isometrie. Sia $(f, g) \in X^* \times Y^*$, allora

$$\|\Psi(f, g)\|_{(X \times Y)^*} = \|f + g\|_{(X \times Y)^*} \leq \|f\|_{(X \times Y)^*} + \|g\|_{(X \times Y)^*} = \|f\|_{X^*} + \|g\|_{Y^*}$$

da cui segue $\|\Psi\|_{\text{op}} \leq 1$. Invece se $f \in (X \times Y)^*$ e $(x, y) \in X \times Y$ con $\max(\|x\|_X, \|y\|_Y) = 1$ allora

$$|f(x, 0) + f(0, y)| \leq |f(x, 0)| + |f(0, y)| \leq \|f\|_{(X \times Y)^*} \max(\|x\|_X, \|y\|_Y) = \|f\|_{(X \times Y)^*}$$

da cui segue $\|\Phi\|_{\text{op}} \leq 1$ e quindi quanto voluto. □

1.2 Completezza Metrica e spazi di Banach

Definizione 1.2.1: Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è detta *di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m > N \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposizione 1.2.2: *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Se $x_n \to x^* \in X \implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, allora $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N \; d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ma allora se $n, m > N$ si ha che $d(x_n, x_m) \le d(x_n, x^*) + d(x^*, x_m) < \varepsilon$. □

Proposizione 1.2.3: *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione di Cauchy. Se $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to x^* \in X$ allora anche $x_n \to x^*$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, si ha che $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m > N \; d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ ed essendo $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to x^*$ si ha che $\exists K \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k > K \; d(x_{n_k}, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque se $M = \max\{N, n_K\}$ si ha che $\forall n > M$, preso $n_k > M$

$$d(x^*, x_n) \le d(x^*, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 1.2.4: *Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é una successione di Cauchy $\implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata.*

Dimostrazione. Dalla definizione di successione di Cauchy $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \ge N$ si ha $x_n \in B(x_N, 1)$, dunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(x_N, 1) \cup \{x_1, ..., x_{N-1}\} \subset B(x_N, R)$ per $R > 0$ abbastanza grande. □

Definizione 1.2.5: Uno spazio metrico (X, d) è detto *completo* se ogni successione di Cauchy in (X, d) converge in (X, d).

Proposizione 1.2.6: *Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) se (X, d) è uno spazi metrico completo e $Y \subset (X, d)$ è chiuso allora Y è completo;

(2) se $Y \subset (X, d)$ è completo come sottospazio di X allora è chiuso.

Dimostrazione. Facili verifiche. □

Definizione 1.2.7: Diremo che uno spazio normato $(E, \|.\|)$ è *completo* se è completo lo spazio E munito della metrica indotta dalla norma $\|.\|$ ed in tal caso chiameremo $(E, \|.\|)$ *spazio di Banach*.

Esempio 1.2.8: Lo spazio normato $(\mathbb{R}, |.|)$ è di Banach.

Infatti ogni successione di Cauchy è limitata per la Proposizione 1.2.4, dunque per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione monotona e quindi convergente in $\mathbb{R}$, ma allora per la Proposizione 1.2.3 anche la successione originaria converge in $\mathbb{R}$ allo stesso limite.

Teorema 1.2.9 (Criterio di completezza per spazi normati): *Sia $(E, \|.\|)$ uno spazio normato. Lo spazio $(E, \|.\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie normalmente convergente converge in E, ossia*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E.$$

Dimostrazione. Sia $(E, \|\cdot\|)$ completo e siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.c. $\sum_n \|x_n\| < +\infty$. Allora la successione delle somme parziali $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \|x_k\|$ è convergente in $\mathbb{R}$ e $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Ma allora la successione $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ è anch'essa di Cauchy, infatti presi $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \leq q$ abbiamo

$$\|S_q - S_p\| = \|\sum_{p\leq j\leq q} x_j\| \leq \sum_{p\leq j\leq q} \|x_j\| = \sigma_q - \sigma_p = |\sigma_q - \sigma_p| \leq \varepsilon$$

per p, q abbastanza grandi. Di conseguenza, essendo E completo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in E.

Supponiamo ora che tutte le serie normalmente convergenti convergano in E. Sia $(x_n)_n$ una successone di Cauchy. Per definizione $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall p \geq n_k\ \|x_{n_k} - x_p\| \leq 2^{-k}$ e posso scegliere induttivamente gli n_k in modo che siano strettamente crescenti. Dunque abbiamo una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq 2^{-k}$ (prendendo $p = n_{k+1}$). Scriviamo

$$x_{n_k} = x_{n_0} + \sum_{j=0}^{k-1} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

notiamo che questa è la somma parziale della serie di elementi di E

$$x_{n_0} + \sum_{j\in\mathbb{N}} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$$

che è normalmente convergente, infatti

$$\|x_{n_0}\| + \sum_{j\in\mathbb{N}} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \|x_{n_0}\| + \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} = \|x_{n_0}\| + 2.$$

Ma allora tale serie converge in E per ipotesi e quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente, dunque converge per la Proposizione 1.2.3. □

Definizione 1.2.10: Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato ed $N \subset X$ un suo sottospazio lineare chiuso. Sul quoziente X/N oltre alla ben nota struttura di spazio vettoriale è definibile anche la *norma quoziente*

$$\|x + N\|_{X/N} = \inf_{v\in N} \|x + v\| \ \ \forall x \in X.$$

Proposizione 1.2.11: *Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato ed $N \subset X$ un suo sottospazio lineare chiuso. X è completo se e solo se lo sono entrambi X/N (con la norma quoziente) ed N.*

Dimostrazione. Supponiamo X completo. Allora automaticamente anche N è completo essendo chiuso. Per quanto riguarda X/N consideriamo $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X/N$ con $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|_{X/N} < +\infty$. Per definizione di norma quoziente possiamo trovare una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ t.c.

$$\|x_n\| \leq \|\xi_n\|_{X/N} + \frac{1}{n^2} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|_{X/N} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

e, per il Teorema 1.2.9, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge in X. Inoltre la proiezione $\pi : X \longrightarrow X/N$ è lineare, continua con $\|\pi\|_{\mathrm{op}} = 1$, in quanto $x \in \pi x$, dunque $\|\pi x\|_{X/N} \leq \|x\|$. Di conseguenza essendo $\xi_n = \pi x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ si ha che la somma $\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ converge in X/N a $\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Viceversa supponiamo che X/N ed N siano completi. Consideriamo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione di Cauchy. Siccome $\pi : X \longrightarrow X/N$ è lineare e continua è anche lipschitziana e quindi uniformemente continua, quindi manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. Di conseguenza $(\pi x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in X/N che è completo, quindi converge ad una $\xi \in X/N$. Per surgettività di π posso scrivere $\xi = \pi y$ per un qualche $y \in X$. Ora

$$\|\pi y - \pi x_n\|_{X/N} = \|\pi(y - x_n)\|_{X/N} \leq \|\pi\|_{\mathrm{op}}\|y - x_n\| \longrightarrow 0 \ \text{ per } n \to +\infty$$

quindi per definizione di norma quoziente si può trovare una successione $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ t.c.

$$\|y - x_n + h_n\| \leq \|\pi(y - x_n)\|_{X/N} + \frac{1}{n}.$$

ossia successione $(\varepsilon_n = y - x_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $0 \in X$ in X. Dunque $h_n = x_n - y + \varepsilon_n$ è somma di successioni di Cauchy e quindi è anch'essa di Cauchy. Ma è di Cauchy in N che è completo, dunque converge in $N \subset X$. Allora anche $x_n = y + h_n - \varepsilon_n$ converge in X. □

1.3 Alcuni Spazi di Funzioni

Sia S un insieme ed $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Presa $f : S \to E$ consideriamo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in S} \|f(x)\|.$$

Dunque considero lo spazio

$$\mathrm{B}(S, E) = \{f : S \to E \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$$

si verifica che $\|.\|_\infty : \mathrm{B}(S, E) \to [0, +\infty)$ è effettivamente una norma sullo spazio vettoriale $\mathrm{B}(S, E)$ ed è denominata *norma uniforme*.

Proposizione 1.3.1: *Sia S un insieme ed* $(E, \|.\|)$ *uno spazio di Banach. Allora* $(\mathrm{B}(S, E), \|.\|_\infty)$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Usiamo il Teorema 1.2.9. Sia $(f_n)_n \subset \mathrm{B}(S, E)$ con $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ Allora $\forall x \in S$ essendo $\|f(x)\|_E \leq \|f\|_\infty$ si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\|_E \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$$

dunque anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge in E per ogni $x \in S$ in quanto E è di Banach. Ora c'è da dire che la serie converge uniformemente (cioè nella metrica di $\mathrm{B}(S, E)$) ad una limitata. Consideriamo il limite puntuale della serie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Per ogni $x \in S$

$$\|F(x)\|_E \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\|_E \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$$

quindi prendendo il $\sup_{x\in S}$

$$\|F\|_\infty \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$$

ossia $F \in \mathscr{B}(S,E)$. Inoltre

$$\|F - \sum_{n=0}^{m} f_n\|_\infty \le \sum_{n=m+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \to 0 \text{ per } m \to \infty$$

dunque la serie converge uniformemente ad $F \in \mathrm{B}(S,E)$, dunque $(\mathrm{B}(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ è effettivamente di Banach. □

Nel caso in cui S è uno spazio topologico possiamo considerare lo spazio

$$C_b^0(S,E) = \{f : S \to E \mid f \text{ continua e limitata}\} \subset \mathrm{B}(S,E).$$

Proposizione 1.3.2: *Sia S uno spazio topologico ed* $(E, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach allora* $(C_b^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Essendo $C_b^0(S,E) \subset \mathrm{B}(S,E)$ basta mostrare che è chiuso in quest'ultimo munito della norma uniforme. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b^0(S,E)$ che converge ad una $f \in \mathrm{B}(S,E)$. Proviamo che $f \in C_b^0(S,E)$. Sia $x_0 \in S$, vediamo che f è continua in x_0 da cui la tesi per l'arbitrarietà di x_0 in S. Sia $\varepsilon > 0$, siccome $f_n \to f$ uniformemente, esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\|f_{n_0} - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{3}$. Essendo f_{n_0} continua in x_0 esiste un intorno U di x_0 t.c.

$$\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in U.$$

Ma allora per ogni $x \in U$

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0)\| &\le \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\| \\ &\le 2\|f_{n_0} - f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} \le 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dunque f è continua in x_0. □

Proposizione 1.3.3: *Siano* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *due spazi normati. Se F è spazio di Banach allora* $(\mathrm{L}(E,F), \|.\|_{op})$ *è di Banach.*

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$\mathrm{L}(E,F) \ni T \overset{J}{\longmapsto} T_{|\overline{B}_E} \in \mathrm{B}(\overline{B}_E, F).$$

Notiamo che la norma operatoriale è fatta in modo tale da rendere quest'immersione un'isometria,infatti

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|Tx\|_F = \|T_{|\overline{B}_E}\|_\infty$$

inoltre l'immagine di tale immersione $J(\mathrm{L}(E,F))$ è chiusa in $\mathrm{B}(\overline{B}_E, F)$. Infatti se $(T_{n|\overline{B}_E})$ è una successione nell'immagine di J che converge ad una $f \in \mathrm{B}(\overline{B}_E, F)$ si ha

$$T_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in \overline{B}_E$$

in quanto in $\overline{B}_E$ la successione converge (addiritura assolutamente). Quindi $\forall x \in E\setminus\{0\}$ abbiamo

$$T_n(x) = \|x\|_E T_n\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \longrightarrow \|x\|_E f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) = T(x)$$

cioè le applicazioni $T_n : E \to F$ convergono per ogni $x \in E$ ad una $T : E \to F$ (converge anche in 0 perché in 0 è una successione costante di valore 0) e risulta che T è lineare, infatti

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

inoltre $T|_{\overline{B}_E} = f$ che è limitata, cioè T è limitata sulla palla unitaria chiusa, ma allora, per linearità, è lipschitziana e quindi è continua. Di conseguenza f è restrizione di una $T \in \mathrm{L}(E, F)$ cioè $f \in J(\mathrm{L}(E, F))$.

Abbiamo dimostrato che $J(\mathrm{L}(E, F))$ è chiusa in $\mathrm{B}(\overline{B}_E, F)$ che è di Banach (in quanto F è di Banach), dunque $J(\mathrm{L}(E, F))$ stesso è di Banach ed essendo $\mathrm{L}(E, F)$ isometrico a $J(\mathrm{L}(E, F))$ è anch'esso di Banach. □

Corollario 1.3.4: *Lo spazio duale di un qualsiasi spazio normato, reale o complesso, è uno spazio di Banach.*

Lemma 1.3.5: *Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale, $p \in [1, +\infty)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(X, \mu; \mathbb{K})$ non negative e $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$. Allora vale*

$$\|g\|_{\mathscr{L}^p(X)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{\mathscr{L}^p(X)}.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{\mathscr{L}^p(X)} \ge \sum_{n=1}^{N} \|g_n\|_{\mathscr{L}^p(X)} \ge \left\|\sum_{n=1}^{N} g_n\right\|_{\mathscr{L}^p(X)}$$

dove si è usata la disuguaglianza di Minkowski per la seconda disuguaglianza. Inoltre esplicitando gli integrali coinvolti e notando che vi è la convergenza puntuale e monotona (per la positività delle g_n) delle somme parziali di $g_n(x)$ a $g(x)$, per il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi, si ha

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} g_n\right\|_{\mathscr{L}^p(X)} \longrightarrow \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\right\|_{\mathscr{L}^p(X)}$$

da cui segue quanto voluto. □

Proposizione 1.3.6: *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale e $p \in [1, +\infty]$. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Lo spazio $(L^p(X, \mu; \mathbb{K}), \|.\|_{L^p(X)})$ è di Banach.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Facciamo prima il caso più semplice di $p = +\infty$. Consideriamo lo spazio

$$\mathrm{B}_m(X, \mu; \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ misurabile e limitata}\}$$

questo è chiuso in $\mathrm{B}(X, \mathbb{K})$, che è completo, dunque è anch'esso completo. Per concludere notiamo che

$$L^\infty(X, \mu; \mathbb{K}) = \mathscr{L}^\infty(X, \mu; \mathbb{K})/N = \mathrm{B}_m(X, \mu; \mathbb{K})/N$$

in cui $N = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f = 0\ \mu\text{-q.o. su } X\}$. Da cui segue la tesi notando che la norma indotta al quoziente da $\mathrm{B}_m(X, \mu; \mathbb{K})$ è esattamente la norma $\|.\|_{L^\infty(X)}$.

Vediamo adesso il caso $p \in [1, +\infty)$. Tenendo a mente il Teorema 1.2.9 basta dimostrare che data $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X, \mu; \mathbb{K})$ t.c. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(X)}$ allora la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge a una qualche $f \in L^p(X, \mu; \mathbb{K})$. Dividiamo la dimostrazione in due step.

Passo 1: *Costruiamo la f.*

Vale

$$+\infty > \sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{L^p(X)} = \sum_{n\geq 1} \||f_n|\|_{L^p(X)} \geq \left\| \left(\sum_{n\geq 1} |f_n| \right) \right\|_{L^p(X)}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal lemma precedente. Dal fatto che $\|(\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|)\|_{L^p(X)} < \infty$ segue che $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ è finita μ-q.o. su X, quindi, per la completezza di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, vale $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge ad una qualche $f(x) \in \mathbb{K}$ per μ-q.o. $x \in X$. (L'insieme in cui non vi è convergenza puntuale è trascurabile, quindi ai fini della dimostrazione è irrilevante sapere come si comporta f su tale insieme).

Passo 2: *Verifichiamo che la f così trovata è il limite in $L^p(X, \mu; \mathbb{K})$ cercato.*

Usando ancora il lemma precedente si ottiene

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_{L^p(X)} = \left\| \sum_{n\geq N+1} f_n \right\|_{L^p(X)} \leq \left\| \sum_{n\geq N+1} |f_n| \right\|_{L^p(X)} \leq \sum_{n\geq N+1} \|f_n\|_{L^p(X)}$$

che è la coda di una serie convergente e dunque infinitesima per $N \to +\infty$. Otteniamo in questo modo la convergenza in norma L^p a f. Inoltre, con un conto analogo si ottiene anche che $f \in L^p(X, \mu; \mathbb{K})$, infatti si ha anche

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \right\|_{L^p(X)} \leq \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \right\|_{L^p(X)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(X)} < +\infty.$$

□

1.4 Serie di Neumann ed Omeomorfismi Lineari

Proposizione 1.4.1 (Serie di Neumann): *Sia $(E, \|.\|)$ spazio di Banach e sia $H \in \mathrm{L}(E)$ con $\|H\|_{op} < 1$ allora l'operatore $I - H$ è invertibile con inversa continua, la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} H^k$ è normalmente convergente, ossia $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|H^k\|_{op} < +\infty$, e vale*

$$(I - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) La serie $\sum_{k=0}^{\infty} H^k$ è normalmente convergente in quanto $\|H^k\|_{\mathrm{op}} \leq \|H\|_{\mathrm{op}}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|H^k\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|H\|_{\mathrm{op}}^k = \frac{1}{1 - \|H\|_{\mathrm{op}}}.$$

Prendiamo quindi $L = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^k \in \mathrm{L}(E)$ (è continua perché $\mathrm{L}(E)$ è completo, quindi ogni serie normalmente convergente converge in $\mathrm{L}(E)$). Notiamo che moltiplicare per una $A \in \mathrm{L}(E)$ è un applicazione lineare continua. Infatti che sia lineare è ovvio e per far vedere che è continua basta notare che è limitata in un intorno di $0 \in \mathrm{L}(E)$ (applicazione identicamente nulla) in quanto

$\|AT\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|T\|_{\mathrm{op}}$. Dunque se ho una successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(E)$ ed un $T \in \mathrm{L}(E)$ t.c. $T_n \to T$ allora $AT_n \to AT$. Di conseguenza si ha

$$LH = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} H^k\right) H = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^{k+1} = L - I$$

e lo stesso per HL. Quindi vale

$$LH = HL = L - I$$

da cui segue

$$L(I - H) = (I - H)L = I$$

cioè $I - H$ è invertibile con inversa $L = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^k$. □

In realtà si può richiedere anche meno.

Proposizione 1.4.2: *Sia $(E, \|.\|)$ spazio di Banach e sia $H \in \mathrm{L}(E)$ per il quale esiste un $m \in \mathbb{N}$ t.c. $\|H^m\|_{op} < 1$ allora l'operatore $I - H$ è invertibile con inversa continua, la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} H^k$ è normalmente convergente e vale*

$$(I - H)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^k.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Alla luce della dimostrazione della Proposizione 1.4.1 basta vedere che per la serie $\sum_{k=0}^{\infty} H^k$ è normalmente convergente. Abbiamo

$$\sum_{k=0}^{n} \|H^k\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{j=0}^{J_n} \sum_{r=0}^{m-1} \|H^m\|_{\mathrm{op}}^j \|H\|_{\mathrm{op}}^r \leq \max_{r\in[m-1]} \|H\|_{\mathrm{op}}^r \sum_{j=0}^{J_n} \|H^m\|_{\mathrm{op}}^j$$

in cui $J_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Dunque

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|H^k\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{M}{1 - \|H^m\|_{\mathrm{op}}}$$

ossia la serie è normalmente convergente. □

Ora una conseguenza interessante. Denoteremo con

$$\mathrm{GL}(E) = \{A \in \mathrm{L}(E) \mid A \text{ invertibile con inversa continua}\}.$$

Si verifica facilmente che $\mathrm{GL}(E)$ è un gruppo con l'operazione di composizione. Talvolta nel seguito useremo il termine *omeomorfismo lineare* per indicare un operatore lineare invertibile con inversa continua.

Proposizione 1.4.3: *Sia $(E, \|.\|)$ spazio di Banach. Allora $\mathrm{GL}(E)$ è aperto in $\mathrm{L}(E)$ con la topologia indotta dalla norma operatoriale.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Sia $A \in \mathrm{GL}(E)$. Dimostriamo che $B(A, \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}) \subset \mathrm{GL}(E)$. Infatti sia $H \in B(0, \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1})$, allora

$$A + H = A(I + A^{-1}H) = A(I - (-A^{-1}H))$$

e $\| - A^{-1}H\|_{\mathrm{op}} = \|A^{-1}H\|_{\mathrm{op}} \leq \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|H\|_{\mathrm{op}} < 1$ dunque $(I - (-A^{-1}H)) \in \mathrm{GL}(E)$ per la Proposizione 1.4.1 e quindi $A + H \in \mathrm{GL}(E)$. □

2

Spazi di Hilbert

2.1 Spazi di Hilbert Reali

Definizione 2.1.1: Sia V spazio vettoriale reale, una *forma* su V è una funzione $(.\cdot.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ed è detta

- *bilineare* se è lineare in entrambe le variabili;
- *simmetrica* se $\forall x, y \in V \ \ (x \cdot y) = (y \cdot x)$;
- *positiva* se $\forall x \in V \ \ (x \cdot x) \geq 0$ e *definita positiva* se è positiva ed in aggiunta $(x \cdot x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Una forma bilineare, simmetrica e definita positiva su V è detta *prodotto scalare* su V.

Proposizione 2.1.2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz): *Sia V uno spazio vettoriale reale su cui è definita una forma bilineare, simmetrica e positiva $(. \cdot .)$. Vale*

$$|(x \cdot y)| \leq \sqrt{(x \cdot x)}\sqrt{(y \cdot y)} \ \ \forall x, y \in V. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Presi $x, y \in V$ si considera la funzione polinomiale

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto (x + ty)^2 = (x \cdot x) + 2(x \cdot y)t + (y \cdot y)t^2 \in [0, +\infty).$$

Questo è un polinomio di grado al più 2 positivo su $\mathbb{R}$, dunque il suo discriminante è necessariamente ≤ 0, scrivendo chi è il discriminante e ponendolo ≤ 0 si ottiene (2.1). □

Corollario 2.1.3: *Munendo V, spazio vettoriale reale, di $(. \cdot .)$ forma bilineare, simmetrica e positiva ottengo uno spazio seminormato con seminorma $\|x\| = \sqrt{(x \cdot x)} \ \ \forall x \in V$. Se in aggiunta $(. \cdot .)$ è definita positiva la funzione $\|.\|$ dà vita ad una vera e propria norma e V diventa quindi spazio normato.*

Definizione 2.1.4: Uno *spazio pre-hilbertiano* reale è uno spazio vettoriale H con un prodotto scalare $(. \cdot .)$. Se lo spazio H, con la topologia indotta dalla norma $\|x\| = \sqrt{(x \cdot x)} \ \ \forall x \in H$, è completo sarà detto *spazio di Hilbert reale*.

Proposizione 2.1.5 (Identità del parallelogramma): *Siano H uno spazio pre-hilbertiano reale con prodotto scalare $(.\cdot .)$ e $\|.\|$ la norma su H da esso indotta. Allora vale*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ \ \forall x, y \in V.$$

Dimostrazione. Semplice conseguenza dell'identità $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \cdot y)$ per $x, y \in H$. □

Proposizione 2.1.6 (Identità del parallelogramma generalizzata): *Siano H uno spazio pre-hilbertiano reale con prodotto scalare $(.\cdot.)$ e $\|.\|$ la norma su H da esso indotta. Allora $\forall x_1, \ldots, x_n \in H$ vale*

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Dimostrazione. Sviluppando il membro di sinistra, ogni termine del tipo $\|x_i\|^2$ si trova 2^n volte, mentre i termini misti $(x_i \cdot x_j)$ con $i \neq j$ si trovano tante volte col segno positivo quante col segno negativo, dunque si elidono e si ottiene la tesi. □

Proposizione 2.1.7 (Circocentro in spazi di Hilbert): *Siano H uno spazio di Hilbert reale ed $E \subset H$ limitato con* $\mathrm{diam}(E) > 0$. *Esiste un'unica palla chiusa $\overline{B}(c_E, r_E)$ con $c_E \in H$ e $r_E > 0$ con raggio minimo tra quelle che contengono E. Il punto c_E è detto* circocentro *di E.*

Dimostrazione. L'ipotesi $\mathrm{diam}(E) > 0$ ci serve per assicurarci che effettivamente $r_E > 0$. Considero

$$d = \inf_{x \in H} \sup_{y \in E} \|x - y\|$$

e chiamiamo $D_x = \sup_{y \in E} \|x - y\| \ \ \forall x \in H$ ($D_x < +\infty \ \ \forall x \in H$ perché E è limitato). Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ t.c. $D_{x_n} \to d$ e sia $\varepsilon > 0$. Sia $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N_\varepsilon \ D^2_{x_n} < d^2 + \varepsilon$. Dunque fissiamo $y \in E$, lo sceglieremo in seguito in modo intelligente. Prendiamo $p, q > N_\varepsilon$, grazie all'Identità del Parallelogramma (Proposizione 2.1.5) si ottiene

$$\begin{aligned}
\|x_p - x_q\|^2 &= \|(x_p - y) - (x_q - y)\|^2 \\
&= 2\left(\|x_p - y\|^2 + \|x_q - y\|^2\right) - \|x_p + x_q - 2y\|^2 \\
&\leq 2(D^2_{x_p} + D^2_{x_q}) - 4\left\|\frac{x_p + x_q}{2} - y\right\|^2 \\
&< 4d^2 + 4\varepsilon - 4\left\|\frac{x_p + x_q}{2} - y\right\|^2
\end{aligned}$$

adesso scegliamo $y = y_{p,q} \in E$ t.c. $\left\|\frac{x_p + x_q}{2} - y\right\| \geq D^2_{\frac{x_p+x_q}{2}} - \varepsilon \geq d^2 - \varepsilon$, dunque si ottiene

$$\|x_p - x_q\|^2 \leq 8\varepsilon$$

da cui segue che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in H per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. Ma H è completo dunque l'inf è realizzato da almeno un punto $x^* \in H$. E preso $r^* = D_{x^*} = d$ si ha che ogni palla chiusa che contiene E è contenuta in $\overline{B}(x^*, r^*)$, dunque tale palla soddisfa le richieste della tesi.

L'unicità del punto che realizza l'inf segue da un procedimento simile a quello appena attuato con al posto di x_p e x_q due punti minimizzanti. Se $x_1^*, x_2^* \in H$ sono due punti che realizzano l'inf, cioè t.c. $D_{x_1^*} = D_{x_2^*} = d$, preso $y \in E$ si ha

$$\begin{aligned}\|x_1^* - x_2^*\|^2 &= = \|(x_1^* - y) - (x_2^* - y)\|^2 \\ &= 2\left(\|x_1^* - y\|^2 + \|x_2^* - y\|^2\right) - 4\left\|\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - y\right\|^2 \\ &\leq 4d^2 - 4\left\|\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - y\right\|^2.\end{aligned}$$

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ e scegliamo $y^* \in E$ t.c. $\left\|\frac{x_1^*+x_2^*}{2} - y\right\|^2 \geq D_{\frac{x_1^*+x_2^*}{2}} - \varepsilon$, dunque abbiamo

$$\|x_1^* - x_2^*\|^2 \leq 4d^2 - 4\left\|\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - y^*\right\|^2 \leq 4d^2 - 4D_{\frac{x_1^*+x_2^*}{2}} + 4\varepsilon \leq 4\varepsilon$$

da cui segue l'unicità voluta grazie all'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

Proposizione 2.1.8 (Punto di minima norma su un convesso): *Siano H spazio di Hilbert reale e $C \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora $\exists! c \in C$ di minima norma, cioè t.c.*

$$\|c\| = \inf_{x\in C} \|x\| = \min_{x\in C} \|x\|$$

Dimostrazione. Sia $d = \inf_{x\in C} \|x\| \in [0, +\infty)$. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ t.c. $\|x_n\| \to d$. Basta provare che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in quanto essendo C chiuso convergerà ad un punto di C ed essendo la norma continua tale limite avrà norma proprio d. Per completezza di H basta provare che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Siano $p, q \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned}0 \leq \|x_p - x_q\|^2 &= 2(\|x_p\|^2 + \|x_q\|^2) - \|x_p + x_q\|^2 \\ &= 2(\|x_p\|^2 + \|x_q\|^2) - 4\left\|\frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2\end{aligned}$$

ma $\frac{x_p+x_q}{2} \in C$ per convessità, quindi possiamo scrivere

$$\|x_p - x_q\|^2 \leq 2(\|x_p\|^2 + \|x_q\|^2) - 4d^2$$

e quindi per $p, q \in \mathbb{N}$, $\ p, q \to +\infty$ si ha

$$0 \leq \|x_p - x_q\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 + o(1) - 4d^2 = o(1)$$

da cui quanto voluto.

Inoltre se $x, x' \in C$ sono t.c. $\|x\| = \|x'\| = d$ abbiamo

$$0 \leq \|x - x'\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{x + x'}{2}\right\|^2 \leq 0$$

in quanto $\frac{x+x'}{2} \in C$, quindi $x = x'$ ed il minimo è unico. □

2.2 Proiettori e Ortogonalità

Fissiamo H spazio di Hilbert reale con prodotto scalare $(. \cdot .)$ e sia $\|.\|$ la norma su H da esso indotta.

Definizione 2.2.1: Dato $C \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto definiamo il *proiettore metrico* su C come la funzione $P_C : H \to C$ t.c.

$$P_C(x) = \operatorname{argmin}_{y\in C} \|y - x\|$$

ossia quell'unico elemento $P_C(x)$ di C t.c. $\|P_C(x) - x\| = \min_{y\in C} \|y - x\|$.

Osservazione 2.2.2: La definizione appena data è ben posta grazie alla Proposizione 2.1.8.

Proposizione 2.2.3: *Siano $C \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto e P_C il suo proiettore metrico. Allora per ogni $x \in H$ si ha*

$$y = P_C(x) \iff y \in C \;\; e \;\; ((x - y) \cdot (z - y)) \leq 0 \;\; \forall z \in C.$$

Dimostrazione. Se $y = P_C(x)$ allora $y \in C$ e $\forall z \in C \;\; \forall t \in (0, 1]$ vale

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 \leq \|x - (tz + (1 - t)y)\|^2 &= \|(x - y) - t(z - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2t((x - y) \cdot (z - y)) + t^2\|z - y\|^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

da cui segue

$$((x - y) \cdot (z - y)) \leq \frac{t}{2}\|z - y\|^2 \to 0 \;\; \forall z \in C \;\; \text{per} \;\; t \to 0.$$

Viceversa, fissiamo $x \in H$ e supponiamo che $y \in C$ sia t.c. $((x - y) \cdot (z - y)) \leq 0 \;\; \forall z \in C$. Allora per ogni $z \in C$ abbiamo

$$\|x - y\|^2 - \|x - z\|^2 = 2((x - y) \cdot (z - y)) - \|z - y\|^2 \leq 0$$

che implica $y = P_C(x)$. □

Proposizione 2.2.4: *Siano $C \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto e P_C il suo proiettore metrico. Vale che P_C è 1-lipschiziana.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in H$, per la Proposizione 2.2.3 vale

$$\begin{aligned} &((x - P_C(x)) \cdot (v - P_C(x))) \leq 0 \;\; \forall v \in C \\ &((y - P_C(y)) \cdot (w - P_C(y))) \leq 0 \;\; \forall w \in C \end{aligned} \tag{2.3}$$

ma $P_C(x), P_C(y) \in C$, dunque ponendo $w = P_C(x)$ e $v = P_C(y)$ rispettivamente nella prima e nella seconda equazione in (2.3) e sommandole insieme otteniamo

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq ((x - y) \cdot (P_C(x) - P_C(y)))$$

da cui, usando la Proposizione 2.1.2, segue

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$ □

Definizione 2.2.5: Due punti $x, y \in H$ si dicono *ortogonali* se $(x \cdot y) = 0$. Dato $S \subset H$ l'*ortogonale* di S è

$$S^\perp = \{x \in H \mid (x \cdot y) = 0 \; \forall y \in S\}$$

Osservazione 2.2.6: Qualunque sia $S \subset H$, per la continuità del prodotto scalare, vale che $S^{\perp}$ è un sottospazio lineare chiuso in H. Infatti ovviamente è un sottospazio lineare e vale

$$S^{\perp} = \bigcap_{y \in S} y^{\perp}$$

in cui $y^{\perp} = \{y\}^{\perp}$ è chiuso per ogni $y \in S$ in quanto controimmagine del chiuso $\{0\} \subset \mathbb{R}$ mediante la funzione continua $H \ni x \mapsto (x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

Osservazione 2.2.7: Per qualunque $S \subset H$ vale

$$S^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{span} S}.$$

Definizione 2.2.8: Un *proiettore lineare* su uno spazio vettoriale X, su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, è un operatore lineare $P : X \to X$ t.c. $P^2 = P$.

Osservazione 2.2.9: Nel seguito dato uno spazio vettoriale X, su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e dati $F_1, F_2 \subset X$ sottospazi lineari in somma diretta algebrica, denoteremo con

$$F_1 \oplus_{alg} F_2$$

l'usuale somma diretta algebrica tra F_1 e F_2.

Proposizione 2.2.10: *Se X è uno spazio vettoriale e $P : X \to X$ è un proiettore lineare allora vale la decomposizione $X = V \oplus_{alg} V'$, in cui $V = \mathrm{Ker}(P)$ e $V' = \mathrm{Im}(P)$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che la funzione $s : V \times V' \to X$ t.c. $s(x, x') = x + x'$ è bigettiva. Per ogni $x \in X$ vale $x = (x - Px) + Px$ e $x - Px \in V$ mentre $Px \in V'$, quindi si ha la surgettività. Proviamo l'iniettività. Sia $x \in X$ e siano $v_1, v_2 \in V$, $v'_1, v'_2 \in V'$ t.c. $x = v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$, allora

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1 \in V \cap V' = \{0\}$$

infatti se $y \in V \cap V'$ vale $y = Pz$ per un qualche $z \in X$ e $0 = Py = P^2 z = Pz = y$. Quindi $v_1 = v_2$ e $v'_1 = v'_2$. □

Teorema 2.2.11: *Siano $F \subset H$ un sottospazio lineare chiuso e P_F il suo proiettore metrico. Allora*

(1) $\forall x \in H \;\; y = P_F(x) \iff y \in F$ *e* $x - y \in F^{\perp}$;

(2) $P_F : H \to F \subset H$ *è un proiettore lineare continuo;*

(3) $H = F \oplus_{alg} F^{\perp}$;

(4) $F^{\perp\perp} = F$.

Dimostrazione. (1) Siano $x \in H$, $y = P_F(x)$ e $v \in F$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $y + tv \in F$ in quanto F è sottospazio lineare, dunque

$$\|x - y\|^2 \le \|x - (y + tv)\|^2 = \|(x - y) - tv\|^2 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

da questo segue

$$2t(v \cdot (x - y)) \le t^2 \|v\|^2 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$(v \cdot (x - y)) \leq \frac{t}{2}\|v\|^2 \ \ \forall t > 0$$

quindi $(v \cdot (x-y)) \leq 0$ ed anche, scambiando v con $-v$, $-(v \cdot (x-y)) \leq 0$. Di conseguenza $(v \cdot (x-y)) = 0 \ \ \forall v \in F$, cioè $x - y \in F^\perp$.

Viceversa se $y \in F$ e $x - y \in F^\perp$, allora $\forall y' \in F$ posso scrivere $y' = y + v$ per un $v \in F$ e

$$\begin{aligned}
\|x - y'\|^2 &= \|(x-y) - v\|^2 \\
&= \|x-y\|^2 + \|v\|^2 - 2((x-y)\cdot v) \\
&= \|x-y\|^2 + \|v\|^2 \\
&> \|x-y\|^2 \ \text{ se } v \neq 0.
\end{aligned}$$

da cui segue che effettivamente $P_F(x) = y$.

(2) Dati $x_1, x_2 \in H$ si ha $x_1 - P_F(x_1), x_2 - P_F(x_2) \in F^\perp$ per il punto (1) ed essendo $F^\perp$ un sottospazio lineare vale quindi

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 P_F(x_1) + \lambda_2 P_F(x_2)) \in F^\perp$$

ed inoltre $\lambda_1 P_F(x_1) + \lambda_2 P_F(x_2) \in F$ dunque per il punto (1) vale

$$P_F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P_F(x_1) + \lambda_2 P_F(x_2)$$

dunque P_F è lineare. La continuità segue dalla Proposizione 2.2.4. Infine $P^2 = P$ segue dal fatto che per $x \in H$ vale $P_F x \in F$ e dal fatto che se $y \in F$ vale $P_F y = y$.

(3) Segue dalla Proposizione 2.2.10.

(4) Ovviamente $F \subset F^{\perp\perp}$. Inoltre preso $x \in F^{\perp\perp}$, per il punto (3), esistono unici $v \in F^\perp$ e $v' \in F$ t.c. $x = v + v'$, dunque in particolare deve valere

$$0 = (x \cdot v) = \|v\|^2 + (v' \cdot v) = \|v\|^2$$

da cui si deduce $v = 0$ e $x = v' \in F$. Quindi si ha anche $F \supset F^{\perp\perp}$.

□

2.3 Spazi di Hilbert Complessi

Definizione 2.3.1: Una *forma* su V spazio vettoriale complesso è una funzione $(\cdot\,\cdot\,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ed è detta

- *sesquilineare* se è lineare nella prima variabile e antilineare nella seconda variabile, cioè $(x \cdot (y + z)) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ e $(x \cdot \lambda y) = \overline{\lambda}(x \cdot y) \ \ \forall x, y, z \in V \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
- *antisimmetrica* se $(x \cdot y) = \overline{(y \cdot x)}$;
- *positiva* se $\forall x \in V \ \ (x \cdot x) \geq 0$ e *definita positiva* se è positiva ed in aggiunta $(x \cdot x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Una forma sesquilineare, antisimmetrica e definita positiva su V è detta *prodotto hermitiano* su V.

Definizione 2.3.2: Uno spazio vettoriale complesso V munito di un prodotto hermitiano $(.\cdot.)$ è detto *spazio pre-hilbertiano complesso*. Se inoltre tale spazio è completo con la topologia indotta dalla norma complessa $\|x\| = \sqrt{(x \cdot x)}$, allora viene detto *spazio di Hilbert complesso*.

Osservazione 2.3.3: Se H con $(.\cdot.)$ è uno spazio pre-hilbertiano complesso, con norma complessa indotta $\|.\|$, se ne deduce uno spazio pre-hilbertiano reale per restrizione degli scalari e con il prodotto scalare (facili verifiche)

$$(x \cdot y)_r = \mathrm{Re}(x \cdot y) \ \ \forall x, y \in V.$$

Tale prodotto scalare induce una norma $\|x\|_r = \sqrt{(x \cdot x)_r} = \sqrt{(x \cdot x)} = \|x\| \ \ \forall x \in H$, infatti $(x \cdot x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$ (per l'antisimmetria). Sullo spazio pre-hilbertiano reale H con $(.\cdot.)_r$ è definita la moltiplicazione per l'unità immaginaria i che corrisponde all'applicazione di un operatore lineare $J : H \to H$ $\mathbb{R}$-lineare e isometrico t.c. $J^2 = -I$.

Viceversa preso uno spazio pre-hilbertiano reale H con $(.\cdot.)$, con norma indotta $\|.\|$, munito di un operatore lineare $J : H \to H$ $\mathbb{R}$-lineare, isometrico e t.c. $J^2 = -I$, se ne può dedurre uno spazio vettoriale complesso col prodotto per scalari

$$(a + ib)x = (aI + bJ)x = ax + bJx \ \ \forall x \in X \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

e diventa uno spazio pre-hilbertiano complesso col prodotto hermitiano (facili verifiche)

$$(x \cdot y)_c = (x \cdot y) + i(x \cdot Jy) \ \ \forall x, y \in H$$

che induce una norma complessa $\|x\|_c = \sqrt{(x \cdot x)_c} = \sqrt{(x \cdot x)} = \|x\| \ \ \forall x \in H$.

Come conseguenza c'è l'esistenza di una naturale corrispondenza tra gli spazi pre-hilbertiani complessi e gli spazi pre-hilbertiani reali muniti di un operatore J $\mathbb{R}$-lineare, isometrico e t.c. $J^2 = -I$.

Inoltre tale corrispondenza è isometrica, quindi dà una "sottocorrispondenza" tra gli spazi di Hilbert complessi e gli spazi di Hilbert reali muniti di un operatore J $\mathbb{R}$-lineare, isometrico e t.c. $J^2 = -I$.

Proposizione 2.3.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, caso complesso): *Sia H con $(.\cdot.)$ uno spazio pre-hilbertiano complesso. Allora vale*

$$|(x \cdot y)| \leq \|x\|\|y\| \ \ \forall x, y \in H.$$

Dimostrazione. Abbiamo notato che $\mathrm{Re}(.\cdot.)$ è un prodotto scalare su H visto come spazio vettoriale reale, dunque per la Proposizione 2.1.2 vale

$$|\mathrm{Re}(x \cdot y)| \leq \|x\|\|y\| \ \ \forall x, y \in H$$

ma questa stessa disuguaglianza vale anche con $\lambda x \in V$ al posto di x, con $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$, dunque

$$|\mathrm{Re}(\lambda(x \cdot y))| = |\mathrm{Re}(\lambda x \cdot y)| \leq \|\lambda x\|\|y\| = \|x\|\|y\| \ \ \forall x, y \in H$$

e preso $\lambda = \frac{(x \cdot y)}{|(x \cdot y)|}$ si ottiene quanto voluto. □

Proposizione 2.3.5 (Identità del parallelogramma, caso complesso): *Siano H uno spazio pre-hilbertiano complesso con prodotto hermitiano $(.\cdot.)$ e $\|.\|$ la norma complessa su H da esso indotta. Allora vale*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ \ \forall x, y \in H.$$

Dimostrazione. Segue dal caso reale (Proposizione 2.1.5) e dall'isometria con lo spazio di Hilbert reale associato ad H provata nell'Osservazione 2.3.3, in quanto presi $x, y \in H$ si ha

$$\|x + y\| = \|x + y\|_r = 2(\|x\|_r + \|y\|_r) = 2(\|x\| + \|y\|).$$

□

Fissiamo adesso H spazio di Hilbert complesso con prodotto hermitiano $(. \cdot .)$ e con norma complessa indotta $\|.\|$. Vediamo che le proprietà dimostrate fin'ora per gli spazi di Hilbert reali valgono anche per quelli complessi.

Proposizione 2.3.6 (Punto di minima norma su un convesso, caso complesso): *Sia $C \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora $\exists! c \in C$ di minima norma, cioè t.c.*

$$\|c\| = \inf_{x\in C} \|x\| = \min_{x\in C} \|x\|$$

Dimostrazione. Dall'Osservazione 2.3.3 sappiamo che restringendo gli scalari ad $\mathbb{R}$ e prendendo su H il prodotto scalare $\mathrm{Re}(.\cdot.)$ si ottiene uno spazio di Hilbert reale isometrico a quello originario. In questo spazio vale la tesi (Proposizione 2.1.8) e per isometria si ottiene quanto voluto anche nello spazio di Hilbert complesso originario, infatti se $c \in C$ è t.c.

$$\|c\|_r = \inf_{x\in C} \|x\|_r$$

per isometria si ha automaticamente anche

$$\|c\| = \inf_{x\in C} \|x\|$$

che ci dà l'esistenza. Lo stesso ragionamento al contrario ci dà anche l'unicità, in quanto se ci fossero due punti di minima norma $c_1, c_2 \in C$

$$\|c_1\| = \|c_2\| = \min_{x\in C} \|x\|$$

allora varrebbe automaticamente anche

$$\|c_1\|_r = \|c_2\|_r = \min_{x\in C} \|x\|_r$$

che ci dà un assurdo con l'unicità nel caso reale (Proposizione 2.1.8). □

Esattamente come nel caso reale si definisce anche in questo conteso il proiettore metrico.

Definizione 2.3.7: Dato $C \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto definiamo il *proiettore metrico* su C come la funzione $P_C : H \to C$ t.c.

$$P_C(x) = \mathrm{argmin}_{y\in C} \|y - x\|$$

ossia quell'unico elemento $P_C(x)$ di C t.c. $\|P_C(x) - x\| = \min_{y\in C} \|y - x\|$.

Teorema 2.3.8: *Siano $F \subset H$ un sottospazio lineare chiuso e P_F il suo proiettore metrico. Allora*

(1) $\forall x \in H \;\; y = P_F(x) \iff y \in F \;\; e \;\; x - y \in F^\perp$;

(2) $P_F : H \to F \subset H$ *è un proiettore lineare;*

(3) $H = F \oplus_{alg} F^{\perp}$;

(4) $F^{\perp\perp} = F$.

Dimostrazione. (1) Siano $x \in H$, $y = P_F(x)$ e $v \in F$ con $\|v\| = 1$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha $y + \alpha v \in F$ in quanto F è sottospazio lineare, dunque

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - (y + \alpha v)\|^2 = \|(x - y) - \alpha v\|^2 \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

da questo segue

$$0 \leq |\alpha|^2 - \overline{\alpha}((x - y) \cdot v) - \alpha(v \cdot (x - y))$$

che per $\alpha = ((x - y) \cdot v)$ diventa

$$0 \leq -2|(x - y) \cdot v)|^2$$

da cui $(x - y) \cdot v) = 0$. Avendo provato questo per ogni $v \in F$ con $\|v\| = 1$, lo stesso si ha anche per ogni $v \in F$, ossia $x - y \in F^{\perp}$. Il viceversa è molto simile la caso reale (Teorema 2.2.11) ricordando che in questo caso vale al formula

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x \cdot y).$$

(2) Analogo al caso reale (Teorema 2.2.11).

(3) Segue anche in questo caso dalla generale Proposizione 2.2.10.

(4) Come nel caso reale (Teorema 2.2.11).

□

Esempio 2.3.9: Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Lo spazio di Lebesgue

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \mid \int_X |f|^2 \, d\mu < +\infty \right\}$$

è uno spazio di Hilbert complesso col prodotto hermitiano

$$(f \cdot g) = \int_X f\overline{g} \, d\mu \ \ \forall f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu).$$

2.4 Duale di uno Spazio di Hilbert

Definizione 2.4.1: Sia H uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Preso $u \in H$ definiamo $\phi_u : X \to \mathbb{K}$ come il funzionale lineare e continuo t.c.

$$\langle \phi_u, x \rangle = (x \cdot u) \ \ \forall x \in H.$$

Teorema 2.4.2 (di Riesz): *Sia H uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. La mappa*

$$H \ni u \longmapsto \phi_u \in H^*$$

è un'isometria lineare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o antilineare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Vediamo che la mappa è isometrica, da cui segue anche l'iniettività. Sia $u \in H$. Usando la Proposizione 2.1.2 se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o la Proposizione 2.3.4 se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, otteniamo

$$\|\phi_u\|_* = \sup_{\|x\|=1} |(x \cdot u)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|u\| = \|u\|$$

e vale l'uguaglianza con $x = \frac{u}{\|u\|}$, dunque $\|\phi_u\|_* = \|u\|$. Manca da dimostrare solo la surgettività. Sia $\phi \in H^*$. Se $\phi = 0$ allora $\phi_0 = 0$, dunque supponiamo $\phi \neq 0$. Sia $F = \text{Ker}\phi$, questo è un sottospazio lineare chiuso di H ed essendo $\phi \neq 0$ vale $F \neq H$. Allora $F^\perp \neq \{0\}$, in quanto $F^{\perp\perp} = F \neq H$. Prendiamo $v \in F^\perp \neq \{0\}$ con $\|v\| = 1$ e notiamo che vale

$$\langle \phi, v\rangle x - \langle \phi, x\rangle v \in \text{Ker}\phi = F \quad \forall x \in H$$

dunque $\forall x \in H$ vale

$$0 = ((\langle \phi, v\rangle x - \langle \phi, x\rangle v) \cdot v) = \langle \phi, v\rangle (x \cdot v) - \langle \phi, x\rangle \|v\|^2 = (x \cdot \overline{\langle \phi, v\rangle} v) - \langle \phi, x\rangle$$

da cui $\phi = \phi_u$ con $u = \overline{\langle \phi, v\rangle} v$. □

Vediamo adesso due importanti applicazioni del Teorema 2.4.2 di Riesz.

Teorema 2.4.3 (di Lax-Milgram): *Siano H uno spazio di Hilbert complesso e $b : H \times H \to \mathbb{K}$ un funzionale sesquilineare e continuo (cioè $\exists C \geq 0$ t.c. $|b(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|\ \ \forall x, y \in H$). Allora esiste $B \in \mathrm{L}(H)$ t.c.*

$$b(x, y) = (Bx \cdot y) \quad \forall x, y \in H$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in H$ la mappa

$$H \ni y \longmapsto \overline{b(x, y)} \in \mathbb{C}$$

è lineare continua, ossia è un elemento di H^*, quindi per il Teorema 2.4.2 di Riesz esiste unico un $v_x \in H$ t.c.

$$\overline{b(x, y)} = (y \cdot v_x) \quad \forall y \in H.$$

Definiamo quindi $B : H \to H$ t.c. $B(x) = v_x$ per ogni $x \in H$. Per l'unicità data dal Teorema 2.4.2 di Riesz si dimostra facilmente la linearità di B ed inoltre

$$\|Bx\| = \sup_{\substack{y \in H \\ \|y\|=1}} |b(x, y)| \leq C\|x\| \quad \forall x \in H$$

dunque effettivamente $B \in \mathrm{L}(H)$. □

Teorema 2.4.4 (di Radon-Nikodym): *Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile e $\mu, \nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ due misure finite su di esso. Se $\nu \ll \mu$ allora $\exists f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$, non negativa t.c. $\nu = f d\mu$.*

Dimostrazione. Consideriamo le catene di applicazioni lineari

$$L^2(X, \mu + \nu) \overset{(1)}{\hookrightarrow} L^1(X, \mu + \nu) \overset{(2)}{\hookrightarrow} L^1(X, \nu) \xrightarrow{I_\nu} \mathbb{R}$$

$$L^2(X, \mu + \nu) \overset{(1)}{\hookrightarrow} L^1(X, \mu + \nu) \overset{(3)}{\hookrightarrow} L^1(X, \mu)$$

in cui $I_\nu(u) = \int_X u d\nu \ \ \forall u \in L^1(X, \nu)$. L'inclusione (1) è vera e lipschitziana per un noto teorema. (2) e (3) sono vere perché $\mu+\nu \geq \mu, \nu$, dunque $\mathscr{L}^1(X, \mu+\nu) \subset \mathscr{L}^1(X, \nu), \mathscr{L}^1(X, \mu)$ e tale inclusione è continua e passa al quoziente definendo l'inclusione continua voluta, infatti se $f = 0$ $(\mu+\nu)$-q.o. su X allora $f = 0$ μ-q.o. e ν-q.o. su X (l'assoluta continuità di $\nu \ll \mu$ ci dice anche che la (3) è iniettiva, mentre la (2) potrebbe non esserlo, ma tutto questo non ci interessa, l'importante è che siano ben definito e finito l'integrale di una funzione in $L^2(X, \mu+\nu)$ sia rispetto a μ che rispetto a ν). A questo punto utilizziamo il Teorema 2.4.2 di Riesz sul funzionale continuo $I_{\nu|L^2(X,\mu+\nu)}$ che quindi è rappresentato dal prodotto scalare con una qualche $g \in L^2(X, \mu+\nu)$, cioè

$$I_\nu(u) = \int_X u\,d\nu = \int_X ug\,d(\mu+\nu) = \int_X ug\,d\mu + \int_X ug\,d\nu$$

che dà

$$\int_X u(1-g)\,d\nu = \int_X ug\,d\mu$$

da cui segue $g(x) \in (0,1)$ per μ-q.o. $x \in X$ (e quindi anche ν-q.o. perché $\nu \ll \mu$). Infatti per $u = \mathbb{1}_{\{g\geq 1\}}$ si trova che

$$0 \geq \int_{\{g\geq 1\}} (1-g)\,d\nu = \int_{\{g\geq 1\}} g\,d\mu \geq \mu(\{g \geq 1\})$$

che ci dice $\mu(\{g \geq 1\}) = 0$. D'altra parte considerando per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ la funzione $u_n = \mathbb{1}_{\{g\leq -n^{-1}\}}$ si trova

$$0 \leq \int_{\{g\leq -n^{-1}\}} (1-g)\,d\nu = \int_{\{g\leq n^{-1}\}} g\,d\mu \leq -\frac{1}{n}\mu(\{g \leq -n^{-1}\})$$

da cui $\mu(\{g \leq -n^{-1}\}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$, dunque $\{g < 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\{g \leq -n^{-1}\}$ è anch'esso μ-nullo (e quindi anche ν-nullo perché $\nu \ll \mu$). Poi siccome $g, 1-g \geq 0$ μ-q.o. su X segue che vale l'identità

$$\int_X ug\,d\mu = \int_X u(1-g)\,d\nu \quad \text{per ogni } u \text{ misurabile non negativa} \tag{2.4}$$

in quanto valendo per le $u \in L^2(X, \mu+\nu)$, vale in particolare per le funzioni semplici non negative ed usando il teorema di Beppo Levi si arriva ad averla per ogni u misurabile non negativa come voluto. Essendo $1 - g > 0$ μ-q.o. su X, presa v misurabile non negativa è ben definita μ-q.o. su X la funzione misurabile e non negativa $u = \frac{v}{1-g}$, come anche la funzione $f = \frac{g}{1-g}$. Con queste funzioni l'identità (2.4) ci dà

$$\int_X vf\,d\mu = \int_X v\,d\nu \quad \text{per ogni } v \text{ misurabile non negativa}$$

ma quindi questa formula vale anche per ogni $v \in L^1(\nu)$ in quanto una tale funzione è sempre decomponibile in parte reale e parte negativa che sono funzioni misurabili e non negative. In particolare per $v = \mathbb{1}_E$ si ottiene

$$\int_E f\,d\mu = \nu(E) \;\; \forall E \in \mathcal{M}$$

cioè $\nu = f\,d\mu$. □

2.5 Famiglie Ortonormali e Basi Hilbertiane

Fissiamo H spazio di Hilbert su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definizione 2.5.1: Una famiglia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è detta *sistema ortonormale* se

$$(e_\lambda \cdot e_\mu) = \delta_{\lambda\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Definizione 2.5.2: Siano X spazio vettoriale topologico (cioè uno spazio vettoriale munito di una topologia che rende continue le operazioni) e $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset X$. Diremo che $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ è una *famiglia sommabile* con *somma* $S = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ se

$$\forall U \text{ intorno di } 0 \text{ in } X \ \exists A \in \mathscr{P}_f(\Lambda) \text{ t.c. } \forall B \in \mathscr{P}_f(\Lambda),\ B \supset A \text{ vale } S - \sum_{\lambda\in B} x_\lambda \in U$$

in cui $\mathscr{P}_f(\Lambda)$ è la famiglia delle parti finite di Λ.

Osservazione 2.5.3: Se $X = \mathbb{R}$ e $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset [0, +\infty)$ vale che $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è sommabile con somma S se e solo se $S = \sup_{A\in\mathscr{P}_f(\Lambda)} \sum_{\lambda\in A} x_\lambda$.

Se invece $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{R}$ vale che $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è sommabile se e solo se $\sum_{\lambda\in\Lambda} |x_\lambda| < +\infty$.

Esempio 2.5.4: Sia $\{e_1, ..., e_n\} \subset H$ un sistema ortonormale finito. Consideriamo $F = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$, questo è un sottospazio vettoriale chiuso ed è quindi ben definito il suo proiettore metrico $P_F : H \to F \subset H$ che è

$$P_F x = \sum_{k=1}^n (x \cdot e_k) e_k \in F.$$

Infatti preso $j \in \{1, ..., k\}$ vale

$$((x - \sum_{k=1}^n (x \cdot e_k) e_k) \cdot e_j) = (x \cdot e_j) - (x \cdot e_j) = 0$$

cioè $x - \sum_{k=1}^n (x \cdot e_k) e_k \in F^\perp$ e $\sum_{k=1}^n (x \cdot e_k) e_k \in F$, dunque si ha quanto voluto grazie al Teorema 2.2.11.

Definizione 2.5.5: Un sistema ortonormale $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ di H è detto *completo* o *base hilbertiana* se

$$\overline{\operatorname{span}(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})} = H.$$

Teorema 2.5.6: *Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un sistema ortonormale di H. Sono equivalenti*

(1) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una base hilbertiana;

(2) $\forall x \in H \ \inf_{A\in\mathscr{P}_f(\Lambda)} \operatorname{dist}(x, H_A) = 0$ in cui $H_A = \operatorname{span}(\{e_\lambda \mid \lambda \in A\})$;

(3) $\forall x \in H \ \inf_{A\in\mathscr{P}_f(\Lambda)} \|x - P_{H_A} x\| = 0$;

(4) $\forall x \in H$ la famiglia $\{(x \cdot e_\lambda) e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è sommabile con somma $\sum_{\lambda\in\Lambda} (x \cdot e_\lambda) e_\lambda = x$;

(5) (Identità di Parseval) $\forall x \in H \ \|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x \cdot e_\lambda)|^2$;

(6) (Identità di Parseval v.2) $\forall x, y \in H \ (x \cdot y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x \cdot e_\lambda)(y \cdot e_\lambda)$;

(7) la famiglia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è massimale tra i sistemi ortonormali di H.

Dimostrazione. Supponiamo che $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sia base hilbertiana. Prendiamo $x \in H$ e $\varepsilon > 0$. Per definizione di base hilbertiana esiste una combinazione lineare di elementi di $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ che dista da x meno di ε. Dunque si ha (1) $\Rightarrow$ (2). Il viceversa è ovvio dalle definizioni, quindi si ha (1) $\iff$ (2). (2) $\iff$ (3) segue dal fatto che $\operatorname{dist}(x, H_A) = \|x - P_{H_A}x\|$ per ogni $A \in \mathscr{P}_f(\Lambda)$ e per ogni $x \in H$. Ma $P_{H_A}x = \sum_{\lambda\in A}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda$ per ogni $A \in \mathscr{P}_f(\Lambda)$ e per ogni $x \in H$. Quindi, se vale (3), preso $\varepsilon > 0$ esiste un $A_\varepsilon \in \mathscr{P}_f(\Lambda)$ t.c.

$$\left\| x - \sum_{\lambda\in A_\varepsilon} (x \cdot e_\lambda)e_\lambda \right\| < \varepsilon$$

ma quindi vale anche per ogni $B \supset A_\varepsilon$ in quanto in tal caso

$$\left\| x - \sum_{\lambda\in B} (x \cdot e_\lambda)e_\lambda \right\| = \operatorname{dist}(x, H_B) \le \operatorname{dist}(x, H_{A_\varepsilon}) = \left\| x - \sum_{\lambda\in A_\varepsilon} (x \cdot e_\lambda)e_\lambda \right\| < \varepsilon$$

dunque (3) $\Rightarrow$ (4). Il viceversa è ovvio dalle definizioni, quindi si ha (3) $\iff$ (4). Ovviamente (6) $\Rightarrow$ (5). Dimostriamo che (5) $\Rightarrow$ (6). Siano $x, y \in H$, vale

$$(x \cdot y) = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$$

dunque per (5) si ha

$$(x \cdot y) = \frac{1}{4}\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} |((x + y) \cdot e_\lambda)|^2 - \sum_{\lambda\in\Lambda} |((x - y) \cdot e_\lambda)|^2\right] = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)(y \cdot e_\lambda)$$

che è (6). Notiamo che (7) è equivalente (facile verifica dimostrando le contronominali) all'affermazione

$$\forall x \in H \ \ ((x \cdot e_\lambda) = 0 \ \ \forall\lambda \in \Lambda) \Rightarrow x = 0. \tag{M}$$

Da (5) segue facilmente (M). Viceversa se vale (M) dimostriamo che vale (5). Notiamo che è ben definita in H la somma $\sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda$, infatti prendiamo $H_0 = \overline{\operatorname{span}(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})}$ che è chiuso in H completo e quindi anch'esso è completo e prendiamo $x_0 = P_{H_0}x$. Notiamo che $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è base hilbertiana in H_0 che è completo, dunque per il punto (4) si ha lo sviluppo

$$x_0 = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x_0 \cdot e_\lambda)e_\lambda$$

ma $(x_0 \cdot e_\lambda) = (x \cdot e_\lambda) \ \ \forall\lambda \in \Lambda$, in quanto P_{H_0} è autoaggiunto e $P_{H_0}e_\lambda = e_\lambda$. Infatti essendo P_{H_0} un proiettore lineare isometrico per ogni $x, y \in H$ vale

$$(P_{H_0}x \cdot y) = (P^2_{H_0}x \cdot P_{H_0}y) = (P_{H_0}x \cdot P_{H_0}y) = (x \cdot y) = (P_{H_0}x \cdot P^2_{H_0}y) = (x \cdot P_{H_0}y).$$

Quindi abbiamo

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda = x_0 \in H.$$

Di conseguenza possiamo considerare $u = x - \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda$ che è nullo per (M), dunque

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda$$

ossia (M) $\Rightarrow$ (4). Da quanto dimostrato precedentemente sappiamo anche che (4) $\Rightarrow$ (5), dunque (M) $\Rightarrow$ (5). Ossia si ha (7) $\iff$ (M) $\iff$ (5), che conclude la dimostrazione. $\square$

Teorema 2.5.7: *Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un sistema ortonormale di H. Sono equivalenti*

(1) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *è una base hilbertiana;*

(2) $\forall x \in H \ \ \inf_{A\in\mathcal{P}_f(\Lambda)} \operatorname{dist}(x, H_A) = 0$ *in cui* $H_A = \operatorname{span}(\{e_\lambda \mid \lambda \in A\})$*;*

(3) $\forall x \in H \ \ \inf_{A\in\mathcal{P}_f(\Lambda)} \|x - P_{H_A}x\| = 0$*;*

(4) $\forall x \in H$ *la famiglia* $\{(x \cdot e_\lambda)e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *è sommabile con somma* $\sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda = x$*;*

(5) $\forall x \in H \ \ \|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x \cdot e_\lambda)|^2$*;*

(6) $\forall x, y \in H \ \ (x \cdot y) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)\overline{(y \cdot e_\lambda)}$*;*

(7) la famiglia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *è massimale tra i sistemi ortonormali di* H*.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 2.5.6 tranne che per (6) che diventa

$$\forall x, y \in H \ \ (x \cdot y) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)\overline{(y \cdot e_\lambda)}$$

e si dimostra usando l'uguaglianza

$$(x \cdot y) = \frac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2 + i(x + iy)^2 - i(x - iy)^2] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(x + i^k y)^2.$$

Infatti con (5) ci dà

$$(x \cdot y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \sum_{\lambda\in\Lambda} |((x + i^k y) \cdot e_\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} |(x \cdot e_\lambda) + i^k(y \cdot e_\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)\overline{(y \cdot e_\lambda)}.$$

□

Definizione 2.5.8: Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base hilbertiana di H. Lo sviluppo

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x \cdot e_\lambda)e_\lambda$$

dato dal Teorema 2.5.6 (4) o dal Teorema 2.5.7 (4), è detto *sviluppo di Fourier* di x rispetto alla base hilbertiana $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. I numeri $\{(x \cdot e_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ sono detti *coefficienti di Fourier* di x rispetto alla base hilbertiana $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Osservazione 2.5.9: Ricordiamo che una serie a termini positivi finita ha al più un numero numerabile di addendi non nulli. L'Identità di Parseval (Teorema 2.5.6 (5) o Teorema 2.5.7 (5), a seconda di chi è $\mathbb{K}$) ci dice che la serie delle norme quadre dei coefficienti di Fourier di un qualunque elemento di H rispetto ad una qualsiasi base hilbertiana è finita, quindi i coefficienti di Fourier non nulli di un qualsiasi $x \in H$ sono sempre al più numerabili.

Corollario 2.5.10: *Ogni sistema ortonormale di H si può estendere ad una base hilbertiana di H.*

Dimostrazione. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ un sistema ortonormale di H. Se ho una catena per l'inclusione di sistemi ortonormali di H che contengono $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$, ovviamente la loro unione è sempre un sistema ortonormale che contiene $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ ed è un maggiorante di tutta la catena nella famiglia dei sistemi ortonormali di H che contengono $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$. Quindi posso applicare il Lemma di Zorn che mi dà la tesi grazie al Teorema 2.5.6 (7) o al Teorema 2.5.7 (7) (a seconda di chi è $\mathbb{K}$). □

Proposizione 2.5.11: *Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base hilbertiana di H. Allora H è linearmente isometrico allo spazio*

$$\ell^2(\Lambda;\mathbb{R}) = \left\{ f : \Lambda \to \mathbb{R} \mid \sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 < +\infty \right\} = L^2(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda), \gamma; \mathbb{R}) = \mathscr{L}^2(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda), \gamma; \mathbb{R})$$

munito del prodotto scalare $(f \cdot g) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)g(\lambda)\ \ \forall f, g \in \ell^2(\Lambda, \mathbb{R})$. In cui γ è la misura contapunti su Λ.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\Phi : H \to \ell^2(\Lambda;\mathbb{R})$ t.c.

$$\Phi(x) = \hat{x} \ \text{ con } \ \hat{x}(\lambda) = (x \cdot e_\lambda) \ \ \forall x \in H \ \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Questa mappa è ben definita ed è l'isomorfismo cercato. Infatti per l'Identità di Parseval (Teorema 2.5.6 (5)) vale $\hat{x} \in \ell^2(\Lambda, \mathbb{R})\ \ \forall x \in H$, la linearità di Φ segue dalla linearità nella prima variabile del prodotto hermitiano di H ed è isometrica sempre per l'Identità di Parseval (Teorema 2.5.6 (5)). In particolare Φ è iniettiva essendo isometrica. Manca da dimostrare solo la surgettività. Sia $f \in \ell^2(\Lambda, \mathbb{R})$.Vale $\sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 < +\infty$, di conseguenza solo al più un numero numerabile di addendi è non nullo, mettiamo siano quelli di indici in $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$. Se $\tilde{\Lambda}$ è finito allora la somma $x_f = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)e_\lambda$ è banalmente ben definita in H e per costruzione vale $\Phi(x_f) = f$. Se invece $\tilde{\Lambda}$ è numerabile, poniamo $\tilde{\Lambda} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, facciamo vedere che $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\lambda_k)e_{\lambda_k}$ è di Cauchy in H. Infatti presi $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, si ha

$$\|S_q - S_p\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} |f(\lambda_k)|^2 \leq \sum_{k\geq p+1} |f(\lambda_k)|^2 = o(1) \ \text{ per } p, q \to +\infty$$

in quanto coda di serie convergente. Di conseguenza, per completezza di H, esiste è ben definita la somma $x_f = \sum_{k\in\mathbb{N}} |f(\lambda_k)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)e_\lambda$ in H, inoltre per costruzione (e per continuità del prodotto scalare) vale $\Phi(x_f) = f$. □

Proposizione 2.5.12: *Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base hilbertiana di H. Allora H è linearmente isometrico allo spazio*

$$\ell^2(\Lambda;\mathbb{C}) = \left\{ f : \Lambda \to \mathbb{C} \mid \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)^2 < +\infty \right\} = L^2(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda), \gamma) = \mathscr{L}^2(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda), \gamma)$$

munito del prodotto hermitiano $(f \cdot g) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\ \ \forall f, g \in \ell^2(\Lambda;\mathbb{C})$. In cui γ è la misura contapunti su Λ.

Dimostrazione. Analoga a quella della Proposizione precedente, con l'unica differenza nell'uso del Teorema 2.5.7 al posto del Teorema 2.5.6. □

Proposizione 2.5.13: *Tutte le basi hilbertiane di H hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Se H ha un base hilbertiana finita di cardinalità $n \in \mathbb{N}$, allora H è isomorfo a $\mathbb{R}^n$, dunque ogni altra base hilbertiana di H avrà cardinalità n (in quanto una sottofamiglia finita di H è base hilbertiana se e solo se è base algebrica). Altrimenti sia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base hilbertiana di H con $|\Lambda| \geq \aleph_0$. Consideriamo il denso $D = \operatorname{span}_Q(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, con $Q = \mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $Q = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e notiamo che $|D| = |\Lambda|$. Prendiamo quindi $\{f_\mu\}_{\mu\in M}$ un'altra base hilbertiana di H, essendo $\|f_\mu - f_\nu\| = \sqrt{2}\ \ \forall \mu, \nu \in M$ abbiamo che le palle $\{B(f_\mu, \frac{1}{2})\}_{\mu\in M}$ sono disgiunte. Usando l'assioma della scelta possiamo prendere una mappa

$$M \ni \mu \longmapsto x_\mu \in D \cap B\left(f_\mu, \frac{1}{2}\right)$$

in cui $D \cap B(f_\mu, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$ per densità di D. Tale mappa è iniettiva perché abbiamo detto che le palle $\{B(f_\mu, \frac{1}{2})\}_{\mu\in M}$ sono disgiunte, di conseguenza abbiamo $|M| \leq |D|$. Per simmetria della costruzione otteniamo anche $|D| \leq |M|$. Quindi $|M| = |D| = |\Lambda|$. $\square$

Definizione 2.5.14: La *dimensione hilbertiana* di H è la cardinalità di una sua qualsiasi base hilbertiana.

Osservazione 2.5.15: La definizione appena data è ben posta grazie alla Proposizione 2.5.13.

Proposizione 2.5.16: *Sia H di dimensione infinita e $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una sua base hilbertiana. Allora $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è numerabile se e solo se H è separabile.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$: Si ha

$$H = \overline{\operatorname{span}(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})} = \overline{\operatorname{span}_Q(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})}$$

con $Q = \mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $Q = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e il termine $\operatorname{span}_Q(\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ è numerabile (in entrambi i casi) essendo $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ numerabile.

$(\Leftarrow)$: Se per assurdo ci fosse una $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ base hilbertiana più che numerabile, essendo $\|e_\lambda - e_{\lambda'}\| = \sqrt{2}\ \ \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$ si avrebbe H non separabile perché avrei una famiglia più che numerabile di palle disgiunte, $\left(B(e_\lambda, \sqrt{2})\right)_{\lambda\in\Lambda}$, ed una famiglia numerabile non può intersecarle tutte. $\square$

2.6 Ortonormalizzazione di Grahm-Schmidt e Polinomi Ortonormali

Descriviamo adesso un processo standard per costruire basi hilbertiane. Tale processo è chiamato *ortonormalizzazione di Grahm-Schmidt*. Prendiamo H uno spazio di Hilbert separabile reale o complesso di dimensione infinita. Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di elementi di H linearmente indipendenti e t.c. $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}})} = H$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a seconda del caso. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il sottospazio n-dimensionale di H

$$H_n = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(f_0, ..., f_{n-1})$$

e notiamo che $H_n \subsetneq H_{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Si vuole definite un sistema ortonormale $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(u_0, ..., u_{n-1}) = H_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Consideriamo

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{f_0}{\|f_0\|} \\ u_n &= \frac{f_n - P_{H_n} f_n}{\|f_n - P_{H_n} f_n\|} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \end{aligned} \tag{2.5}$$

ed osserviamo che $P_{H_n} f_n \in H_n$ e $f_n \notin H_n$. Per induzione segue che $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(u_0, ..., u_{n-1}) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(f_0, ..., f_{n-1}) = H_n$ ed in particolare per ogni $k < n$ $u_k \in H_n$ e $u_n \in H_n^\perp$, perché $f_n - P_{H_n} f_n \in H_n^\perp$ perciò $(u_k \cdot u_n) = 0$ per ogni $k < n$. Per simmetria si ottiene $(u_k \cdot u_n) = 0$ per ogni $k \neq n$. Mentre $(u_k \cdot u_k) = 1\ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 2.6.1: Osserviamo che $P_{H_n} f_n = \sum_{k=0}^{n-1} (f_n \cdot u_k) u_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, quindi (2.5) è effettivamente una definizione per ricorrenza.

Esempio 2.6.2 (Polinomi ortonormali): Consideriamo il caso particolare di $H = L^2(I, \mu)$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, μ misura non atomica con $\int_I x^{2k} d\mu(x) < +\infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ e t.c. la famiglia $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(I, \mu)$ genera un sottospazio di $L^2(I, \mu)$ denso. Questo è il caso ad esempio di μ finita su I intervallo limitato, in quanto $\mathbb{C}[x]$ è denso uniformemente in $C^0(I)$ per il teorema di Stone-Weierstrass e $C^0(I) \subset L^2(I, \mu)$ è denso perché se $u \in L^2(I, \mu)$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(I)$ converge ad u uniformemente si ha

$$\int_I |u_n - u|^2 d\mu \le \|u_n - u|_{\infty,I}^2 \mu(I) \longrightarrow 0 \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Sotto queste ipotesi il processo di ortonormalizzazione di Grahm-Schmidt è applicabile $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ e produce una successione di polinomi $(p_k^\mu)_{k\in\mathbb{N}}$ che sono detti *polinomi ortonormali* di μ. Osserviamo che $p_n^\mu(x) = a_n x^n + q_{n-1}^\mu(x)$, con $a_n > 0$ e q_{n-1}^μ di grado al più $n-1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 2.6.3: *Sia μ misura boreliana non atomica su $I \subset \mathbb{R}$ intervallo con $\int_I x^{2k} d\mu(x) < +\infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ e t.c. la famiglia $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(I, \mu)$ genera un sottospazio di $L^2(I, \mu)$ denso. I polinomi ortonormali di μ, $\{p_n^\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$, compongono l'unica famiglia numerabile di polinomi t.c.*

(1) $p_n^\mu(x) = a_n x^n + q_{n-1}^\mu(x)$, *con* $a_n > 0$ *e* q_{n-1}^μ *di grado al più* $n-1$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\int_I p_n^\mu(x) p_m^\mu(x) d\mu(x) = \delta_{n,m} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Si nota facilmente che i polinomi $\{p_n^\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfano (1) e (2). Viceversa sia $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[x]$ una qualsiasi famiglia numerabile di polinomi che soddisfa (1) e (2). Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che la famiglia $\{p_i^\mu\}_{i=0,\dots,n}$ è una base per $\text{span}_{\mathbb{C}}(1, x, \dots, x^n)$, dunque

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_{n,i} p_i^\mu(x) \tag{2.6}$$

per qualche coefficiente $\{c_{n,i}\}_{i=0,\dots,n}$. Inoltre, preso $i \in \mathbb{N}$, notiamo che anche $\{p_k\}_{k=0,\dots,i}$ è una base di $\text{span}_{\mathbb{C}}(1, x, \dots, x^i)$, dunque

$$p_i^\mu(x) = \sum_{k=0}^{i} b_{i,k} p_k(x)$$

da cui si ottiene facilmente che p_i^μ è ortogonale ad ogni p_k con $i < k$, in particolare se $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ abbiamo che p_i^μ è ortogonale a p_n. Di conseguenza da (2.6) si ricava $c_{n,i} = 0 \ \ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e si ottiene

$$p_n(x) = c_{n,n} p_n^\mu.$$

Infine abbiamo

$$1 = \int_I p_n^2 d\mu = c_{n,n}^2 \int_I (p_n^\mu)^2 d\mu = c_{n,n}^2$$

che ci dà $c_{n,n} = \pm 1$, ma scrivendo $p_n(x) = b_n x^n + q_{n-1}(x)$ e $p_n^\mu = a_n x^n + q_{n-1}^\mu(x)$, con $a_n, b_n > 0$ e q_{n-1}^μ, q_{n-1}' di grado al più $n-1$, si ha $b_n = c_{n,n} a_n$ da cui necessariamente $c_{n,n} = 1$. Quindi $p_n = p_n^\mu$, da cui la tesi per l'arbitrarietà di $n \in \mathbb{N}$. □

Proposizione 2.6.4: *Sia μ misura boreliana non atomica su $I \subset \mathbb{R}$ intervallo con $\int_I x^{2k} d\mu(x) < +\infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e t.c. la famiglia $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(I,\mu)$ genera un sottospazio di $L^2(I,\mu)$ denso. Siano $\{p_n^\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ la famiglia dei polinomi ortonormali di μ. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio p_n^μ ha n zeri reali e distinti su I.*

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}_+$ il polinomio p_n^μ è ortogonale a p_m^μ per $m \in \{0,1,...,n-1\}$, dunque $p_n^\mu \in H_n^\perp$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$. Se p_n^μ non avesse n zeri distinti reali su I, i suoi zeri reali di molteplicità dispari in I sarebbero meno di n. Siano $x_1 < ... < x_r$, con $r < n$, tali zeri di molteplicità dispari. Dunque il polinomio

$$w(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i) \in H_n$$

in quanto ha grado $r < n$, quindi

$$\int_I p_n^\mu(x) w(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Ma $q(x) = p_n^\mu(x)w(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha segno costante su I, in quanto sia p_n^μ che w cambiano di segno in tutti e soli i punti $\{x_i\}_{i=1,..,r}$, di conseguenza $q(x) = 0$ per μ-q.o. $x \in I$. Grazie a quanto appena provato ed alla continuità di q di ottiene $q = 0$ su tutto I, che è un assurdo in quanto μ è non atomica, quindi ogni polinomio è μ-q.o. non nullo su I. □

3

Spazi Vettoriali Topologici

In tutto il resto del capitolo sarà $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

3.1 Definizione e Prime Proprietà

Definizione 3.1.1: Uno *spazio vettoriale topologico* (in breve *SVT*) su $\mathbb{K}$ X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ munito di una topologia che rende continue le operazioni di somma e prodotto per scalari definite su X. Se in aggiunta ogni punto $x \in X$ ammette un sistema fondamentale di intorni convessi, lo spazio X è detto *spazio vettoriale topologico localmente convesso* (in breve *SVTLC*) su $\mathbb{K}$.

Esempio 3.1.2: Ogni spazio normato è uno SVTLC.

Osservazione 3.1.3: Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Notiamo che le applicazioni di traslazione e moltiplicazione per uno scalare sono omeomorfismi. In particolare la topologia di uno SVT è invariante per traslazione, ossia $\forall E \subset X \;\; \forall x \in X$ vale E aperto se e solo se $x + E$ è aperto. Dunque la topologia di uno SVT è completamente determinata dagli intorni dell'origine, in particolare preso un qualsiasi $x \in X$ un U è intorno di x se e solo se $U = x + V$ con V un intorno di $0 \in X$.

Definizione 3.1.4: Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Chiamiamo *sistema locale di intorni* di X la famiglia di tutti gli intorni di $0 \in X$. Mentre chiamiamo *base locale di intorni* un sistema fondamentale di intorni di $0 \in X$.

Definizione 3.1.5: Dato X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, un suo sottoinsieme $B \subset X$ è detto *bilanciato* se $\alpha B \subset B \;\; \forall \alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$.

Osservazione 3.1.6: Se B è un sottoinsieme bilanciato di X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, allora per ogni $\gamma \in \mathbb{K}$ con $|\gamma| = 1$ vale $\gamma B = B$.

Definizione 3.1.7: Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Un suo sottoinsieme $A \subset X$ è detto *assorbente* se $\forall x \in X \;\; \exists t > 0$ t.c. $x \in tA$.

Osservazione 3.1.8: Un $U \subset X$ intorno di $0 \in X$, con X SVT, è sempre assorbente.

Infatti il prodotto per scalari è continuo, dunque preso $x \in X$ qualsiasi, prendendo $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ infinitesima abbiamo $t_n x \to 0$ in X, da cui segue l'esistenza di un $\alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha x \in U$, ma allora $x \in \frac{1}{\alpha}U$.

Corollario 3.1.9: *Sia X uno SVT con base locale $\mathscr{B}$. Se $V \subsetneq X$ è un suo sottospazio lineare proprio allora $\overset{\circ}{V} = \emptyset$.*

Dimostrazione. Se fosse $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$ allora preso $x \in \overset{\circ}{V}$ si avrebbe l'esistenza di un $U \in \mathscr{B}$ t.c. $x + U \subset V$, ma allora $U \subset V$ e U è assorbente (è intorno di $0 \in X$), dunque necessariamente $V = X$, assurdo. □

Osservazione 3.1.10: Se X è uno SVT e $C \subset X$ è un suo convesso assorbente si ha necessariamente $0 \in C$.

Lemma 3.1.11: *Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Esiste una base locale di intorni aperti bilanciati per l'origine di X. Se invece X è uno SVTLC su $\mathbb{K}$ allora esiste una base locale di intorni aperti convessi e bilanciati per l'origine di X.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Proviamo la prima affermazione. Sia U un intorno di $0 \in X$. Essendo la moltiplicazione per scalari un'applicazione continua, esistono un $\delta > 0$ ed un intorno aperto V di $0 \in X$ t.c. $\alpha V \subset U$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| < \delta$. Definisco

$$W = \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{K}\\ |\alpha|<\delta}} \alpha V$$

allora W è un intorno aperto di $0 \in X$, $W \subset U$ ed è bilanciato. Infatti se $\beta \in \mathbb{K}$ è con $|\beta| \leq 1$ allora $|\beta\alpha| \leq |\alpha| < \delta$ per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| < \delta$ e quindi $\beta\alpha V \subset U$. Di conseguenza

$$\beta W = \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{K}\\ |\alpha|<\delta}} \beta\alpha V \subset \bigcup_{\substack{\gamma\in\mathbb{K}\\ |\gamma|<\delta}} \gamma V = W.$$

Vediamo il caso localmente convesso. Sia U un intorno convesso di $0 \in X$. Consideriamo il convesso bilanciato

$$A = \bigcap_{\substack{\alpha\in\mathbb{K}\\ |\alpha|=1}} \alpha U$$

che è non vuoto perché di sicuro $0 \in A$. Sia ora W come costruito nel caso precedente. Allora W è un intorno aperto e bilanciato di $0 \in X$ contenuto in U. Quindi $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| = 1$ vale $\alpha^{-1}W \subset W$, da cui

$$W \subset \alpha W \subset \alpha U.$$

Questo mostra che $W \subset A$. In particolare $W \subset \overset{\circ}{A}$. Quindi $\overset{\circ}{A}$ è non vuoto ed è allora un intorno di $0 \in X$. Vediamo che è convesso. Sia $t \in [0, 1]$, la convessità di A ed il fatto che $\overset{\circ}{A} \subset A$ implicano che

$$t\overset{\circ}{A} + (1-t)\overset{\circ}{A} \subset A$$

ed essendo A° il più grande aperto in A e $t\overset{\circ}{A} + (1-t)\overset{\circ}{A}$ aperto in A segue $t\overset{\circ}{A} + (1-t)\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}$, da cui $t\overset{\circ}{A} + (1-t)\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$, che è la convessità voluta. Per concludere bisogna vedere che A° è bilanciato. Per costruzione se $\beta \in \mathbb{K}$ con $|\beta| \leq 1$, si ha

$$\beta A = \bigcap_{\substack{\alpha\in\mathbb{K}\\ |\alpha|=1}} \beta\alpha U = \bigcap_{\substack{\alpha\in\mathbb{K}\\ |\alpha|=1}} \alpha(|\beta|U)$$

ed essendo U convesso e contenente $0 \in X$ si ha quindi $|\beta|U \subset U$, da cui

$$\beta A \subset A.$$

Segue che per $\beta \in \mathbb{K}$ con $|\beta| \leq 1$,vale

$$\beta \mathring{A} \subset \mathring{A}$$

che è quanto voluto. Quindi $\mathring{A}$ è un intorno aperto, convesso e bilanciato di $0 \in X$ contenuto in U. □

Lemma 3.1.12: *Sia X un insieme e per ogni $x \in X$ sia data una famiglia $\mathcal{B}_x$ di sottoinsiemi di X. Supponiamo che per le $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ valgano le seguenti proprietà:*

(1) $\forall A \in \mathcal{B}_x$, $x \in A$;

(2) $\forall A \in \mathcal{B}_x \ \ \exists B \in \mathcal{B}_x$ t.c. $\forall y \in B$ si ha $A \in \mathcal{B}_y$;

allora esiste un unica topologia su X t.c. per ogni $x \in X$ la famiglia $\mathcal{B}_x$ coincida con la famiglia degli intorni di x.

Dimostrazione. (Facoltativo) Non è difficile verificare che

$$\tau = \{O \subset X \mid \forall x \in X \text{ se } x \in O \text{ allora } O \in \mathcal{B}_x\}$$

è una topologia su X che realizza quanto voluto. L'unicità segue dal fatto che una topologia come nella tesi è caratterizzata dalle famiglie $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$. □

Proposizione 3.1.13: *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X t.c. $0 \in U \ \ \forall U \in \mathcal{B}$. Supponiamo che $\mathcal{B}$ verifichi le seguenti proprietà:*

(1) $\forall U, V \in \mathcal{B} \ \ \exists W \in \mathcal{B}$ t.c. $W \subset U \cap V$;

(2) $\forall U \in \mathcal{B} \ \ \exists V \in \mathcal{B}$ t.c. $V + V \subset U$;

(3) $\forall U \in \mathcal{B}$ U è assorbente e bilanciato;

allora $\mathcal{B}$ è base locale di intorni per un'unica topologia da SVT su X.

Dimostrazione. (Facoltativo) Per ogni $x \in X$ definiamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{B}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X) \mid \exists U \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x + U \subset V\}.$$

Sia $U \in \mathcal{B}$, avendo $0 \in U$ necessariamente $x = x + 0 \in x + U \in \mathcal{B}(x)$ per ogni $x \in X$. Inoltre fissato $x \in X$ ed $A = x + U \in \mathcal{B}(x)$, dalla (2) si ha l'esistenza di un $V \in \mathcal{B}$ t.c. $V + V \subset U$. Quindi definendo $B = x + V \in \mathcal{B}(x)$ si ha che per ogni $y \in B$

$$y + V \subset B + V \subset x + V + V \subset x + U = A$$

dunque $A \in \mathcal{B}(y)$. Quindi possiamo applicare il Lemma 3.1.12 per dire che che esiste un'unica topologia τ su X che ha $\mathcal{B}(x)$ come sistema fondamentale di intorni per x per ogni $x \in X$, in particolare $\mathcal{B}$ lo è per $0 \in X$. Rimane da controllare la continuità delle operazioni di somma e prodotto per scalari rispetto a tale topologia. La continuità della somma segue facilmente da (2). Vediamo la continuità del prodotto per scalari. Sia $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$ e sia $U' = \lambda_0 x_0 + U \in \mathcal{B}(\lambda_0 x_0)$ (cioè $U \in \mathcal{B}$). Dalle proprietà (2) ancora segue l'esistenza di un $W \in \mathcal{B}$ t.c. $W + W + W \subset U$ ed essendo W assorbente (per (3)) si ha l'esistenza di un $r > 0$ t.c. per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq r$ valga $\lambda x_0 \in W$ e possiamo prendere $r \leq 1$ senza perdita di generalità.

Se $\lambda_0 = 0$ allora, essendo W bilanciato (e $r \leq 1$), si ha

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}(0,r)} \lambda(x_0 + W) &= \bigcup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}(0,r)} (\lambda x_0 + \lambda W) \\ &\subset \bigcup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}(0,r)} (\lambda x_0 + W) \subset W + W \subset W + W + W \subset U.\end{aligned}$$

Se invece $\lambda_0 \neq 0$, preso $\sigma = \min\{r, |\lambda_0|\}$, sempre perché W è bilanciato (e $\sigma \leq r \leq 1$), si ha

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}(\lambda_0,\sigma)} \lambda(x_0 + |\lambda_0|^{-1} W) &= \bigcup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}(\lambda_0,\sigma)} (\lambda x_0 + \lambda |\lambda_0|^{-1} W) \\ &= \bigcup_{t \in B_{\mathbb{K}}(0,\sigma)} ((t + \lambda_0) x_0 + (t + \lambda_0) W) \\ &\subset W + W + W + \lambda_0 x_0 \subset U + \lambda_0 x_0\end{aligned}$$

da cui la continuità voluta. □

Proposizione 3.1.14: *Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Siano $K \subset X$ compatto e $C \subset X$ chiuso con $K \cap C = \emptyset$. Allora $\exists V$ intorno di $0 \in X$ t.c.*

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in K$ si ha $x \notin C$, dunque $\exists U_x$ intorno di $0 \in X$ t.c. $(x + U_x) \cap C = \emptyset$. Per continuità dell'applicazione

$$X \times X \times X \ni (u, v, w) \longmapsto u + v - w \in X$$

$\exists V_x$ intorno di $0 \in X$ t.c. $V_x + V_x - V_x \subset U_x$. Siccome $K \subset \bigcup_{x \in K} x + V_x$, per compattezza, $\exists \{x_1, ..., x_m\} \subset K$, $m \in \mathbb{N}$, t.c. $K \subset \bigcup_{i=1}^m x_i + V_{x_i}$. Prendiamo

$$V = \bigcap_{i=1}^m V_{x_i}$$

questo è ancora un intorno aperto di $0 \in X$ e vale

$$K + V - V \subset \left(\bigcup_{i=1}^m x_i + V_{x_i} \right) + V - V = \bigcup_{i=1}^m (x_i + V_{x_i} + V - V) \subset \bigcup_{i=1}^m x_i + U_{x_i}$$

ma $(x_i + U_{x_i}) \cap C = \emptyset$ $\forall i \in \{1, ..., m\}$, dunque $(K + V - V) \cap C = \emptyset$, da cui segue $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$. □

Corollario 3.1.15: *Uno SVT X su $\mathbb{K}$ è sempre T3.*

Proposizione 3.1.16: *Uno SVT X su $\mathbb{K}$ è T0 se e solo se è T1.*

Dimostrazione. Se X è $T1$ ovviamente è $T0$. Se invece X è $T0$ prendiamo $x, y \in X$, allora $\exists U_x \subset X$ intorno aperto bilanciato di x t.c. $y \notin U_x$ (a meno di scambiarli posso considerare questo setting). Esiste $V \subset X$ intorno aperto bilanciato di $0 \in X$ t.c. $U_x = x + V$. Consideriamo $U_y = y + V$ e dimostriamo che $x \notin U_y$. Infatti se per assurdo fosse $x \in U_y$ allora esisterebbe $v \in V$ t.c. $x = y + v$, ma allora $y = x - v$ e $-v \in V$ (V è bilanciato), dunque si avrebbe $y \in x + V = U_x$ che è un assurdo. La tesi segue facilmente. □

Corollario 3.1.17: *Uno SVT X su $\mathbb{K}$, sono equivalenti:*

- *X è $T0$;*
- *X è $T2$;*
- *X è regolare, ossia $T1$ e $T3$.*

3.2 Seminorme, Funzionale di Minkowski e Topologia

Definizione 3.2.1: Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una funzione $p : X \to \mathbb{R}$ t.c.

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \ \forall x, y \in X$;

(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \ \ \forall x \in X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$;

è detta *seminorma* su X.

Osservazione 3.2.2: Osserviamo che se p è una seminorma su X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, allora $p(0) = 0$ e

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq 2p(x)$$

ossia $p(x) \geq 0 \ \forall x \in X$. Inoltre se $p(x) = 0$ implica $x = 0 \in X$ allora p è effettivamente una norma su X.

Definizione 3.2.3 (Funzionale di Minkowski): Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $C \subset X$ un suo convesso assorbente. Definiamo il *funzionale di Minkowski* di C come il $p_C : X \to \mathbb{R}$ t.c.

$$p_C(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tC\} \in [0, +\infty) \ \ \forall x \in X.$$

Proposizione 3.2.4: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e p una seminorma su X. Allora l'insieme*

$$B = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$$

è convesso, bilanciato ed assorbente, inoltre $p = p_B$. Dunque ogni seminorma su uno SVT è il funzionale di Minkowski di un convesso bilanciato ed assorbente.

Dimostrazione. Essendo p una seminorma è chiaro che B è bilanciato. Se $x, y \in B$ e $t \in [0, 1]$ allora

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < 1$$

dunque B è convesso. Se $x \in X$ e $s > p(x)$ allora

$$p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$$

che prova l'assorbenza di B. Il conto appena fatto prova anche che $p_B(x) < s \ \ \forall s > p(x)$, dunque

$$p_B(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in X.$$

Inoltre se $t \in (0, p(x)]$, allora $p(t^{-1}x) \geq 1$ da cui $t^{-1}x \notin B$, Quindi dalla definizione di p_B segue $p_B(x) \geq t \ \ \forall t \in (0, p(x)]$, dunque

$$p_B(x) \geq p(x) \ \ \forall x \in X.$$

che conclude la dimostrazione. □

Definizione 3.2.5: Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e $p : X \to \mathbb{K}$, diciamo che p è *sublineare* se

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \ \forall x, y \in X$;

(2) $p(tx) = tp(x) \ \ \forall x \in X \ \ \forall t \geq 0$.

Proposizione 3.2.6: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $C \subset X$ un suo convesso assorbente. Il funzionale di Minkowski p_C è sublineare e vale*

$$\{x \in X \mid p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X \mid p_C(x) \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Presi $x \in X$ e $t \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} p_C(tx) &= \inf\{s > 0 \mid tx \in sC\} \\ &= \inf\{t\sigma \mid \sigma \geq 0, \ \ tx \in t\sigma C\} \\ &= t \inf\{\sigma \geq 0 \mid x \in \sigma C\} = tp_C(x). \end{aligned}$$

Inoltre, per convessità, vale

$$aC + bC \subset (a+b)C \ \ \forall a, b \geq 0.$$

Infatti, se almeno uno tra a e b è non nullo, per ogni $x, x' \in C$ si ha

$$\frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}x' \in C$$

che implica $ax + bx' \in (a+b)C$. Mentre se $a = b = 0$ l'inclusione voluta è ovvia. Presi $x, y \in X$ ed $\varepsilon > 0$, per definizione di p_C, si ha $x \in (p_C(x) + \varepsilon)C$ e $y \in (p_C(y) + \varepsilon)C$, quindi

$$x + y \in (p_C(x) + \varepsilon)C + (p_C(y) + \varepsilon)C \subset (p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon)C$$

che implica

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$$

che per $\varepsilon \to 0^+$ conclude la dimostrazione della sublinearità di p.

Inoltre dalla definizione di p_C vale $p_C(x) \leq 1 \ \ \forall x \in C$, cioè $C \subset \{x \in X \mid p_C(x) \leq 1\}$. Viceversa preso $x \in X$ con $p_C(x) < 1$, necessariamente $\exists s < 1$ t.c. $x \in sC$. Ma $sC \subset C$ in quanto $s < 1$, $0 \in C$ e C è convesso, in quanto contiene tutto il segmento congiungente 0 ed x, che in particolare contiene sx per ogni $s < 1$, quindi effettivamente

$$\{x \in X \mid p_C(x) < 1\} \subset C.$$

□

Proposizione 3.2.7: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $C \subset X$ un suo convesso, bilanciato ed assorbente. Allora il funzionale di Minkowski p_C è una seminorma su X.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.2.6 basta dimostrare che $p_C(\alpha x) = |\alpha| p_C(x) \ \ \forall x \in X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$. Fissiamo quindi $x \in X$ ed $\alpha \in \mathbb{K}$. Vale

$$p_C(\alpha x) = |\alpha| p_C\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right) = |\alpha| p_C(x)$$

infatti essendo C bilanciato, per $\gamma \in \mathbb{K}$ con $|\gamma| = 1$, vale $\gamma C = C$ e

$$\begin{aligned} p_C(\gamma x) &= \inf\{t > 0 \mid \gamma x \in tC\} \\ &= \inf\{t > 0 \mid x \in t\gamma C\} \\ &\inf\{t > 0 \mid x \in tC\} = p_C(x). \end{aligned}$$

□

Corollario 3.2.8: *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra le seminorme su X e i suoi sottoinsiemi convessi, bilanciati ed assorbenti.*

Vediamo ora come creare SVTLC.

Definizione 3.2.9: Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme su X è detta *separante* se $\forall x \in X \;\; \exists p \in \mathcal{P}$ t.c. $p(x) > 0$.

Se $\mathcal{I}$ è un insieme, chiameremo $\mathcal{I}^{\#}$ la famiglia dei suoi sottoinsiemi finiti.

Teorema 3.2.10: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia di seminorme. Associamo ad ogni $i \in \mathcal{I}$, $\varepsilon > 0$ l'insieme*

$$U_i(\varepsilon) = \{x \in X \mid p_i(x) < \varepsilon\} \tag{3.1}$$

e ad ogni $I \in \mathcal{I}^{\#}$, $n \in \mathbb{N}_+$

$$U_I(\varepsilon) = \bigcap_{i \in I} U_i(\varepsilon).$$

Prendiamo

$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \left\{U_I(\varepsilon) \mid I \in \mathcal{I}^{\#}, \varepsilon > 0\right\}$$

e definiamo una topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ nel seguente modo

$$A \in \tau_{\mathcal{P}} \iff A \text{ è unione di traslati di elementi di } \mathcal{B}_{\mathcal{P}}.$$

Allora $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ è una base locale di intorni convessi e bilanciati della topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ che rende X uno SVTLC. Inoltre se $\mathcal{P}$ è separante allora $\tau_{\mathcal{P}}$ rende X SVTLC $T2$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Chiaramente la famiglia $\tau_{\mathcal{P}}$ è effettivamente una topologia ed è invariante per traslazioni su X. Inoltre per $\tau_{\mathcal{P}}$ la famiglia $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ è effettivamente una base locale di insiemi convessi e bilanciati (facili verifiche).

Verifichiamo la continuità delle operazioni. Siano $x, y \in X$ e U_{x+y} un intorno di $x + y$, allora $U = U_{x+y} - (x + y)$ è intorno di 0 e quindi

$$U \supset U_I(\varepsilon)$$

per qualche $I \in \mathcal{I}^{\#}$ e qualche $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$V = U_I(2^{-1}\varepsilon)$$

intorno di 0 in X, essendo ogni $p \in \mathcal{P}$ una seminorma vale $V + V \subset U_I(\varepsilon) \subset U$, in quanto se $x, y \in V$ ed $i \in I$ si ha

$$p_i(x + y) \leq p_i(x) + p_i(y) < 2(2^{-1})\varepsilon = \varepsilon,$$

dunque $(x + V) + (y + V) = (x + y) + (V + V) \subset (x + y) + U = U_{x+y}$. Questo prova la continuità della somma.

Siano ora $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Prendiamo $U_{\alpha x}$ intorno di x e consideriamo $U = U_{\alpha x} - \alpha x$. Allora esistono $I \in \mathcal{I}^{\#}$ e $\varepsilon > 0$ t.c. $U_I(\varepsilon) \subset U$, poniamo quindi $V = U_I(2^{-1}\varepsilon)$ come sopra. Prendiamo

$\delta > 0$ t.c. $\delta \max_{i\in I} p_i(x) < 2^{-1}\varepsilon$ ed $\varepsilon_0 \in \mathbb{N}_+$ t.c. $\varepsilon_0(|\alpha|+\delta) < 2^{-1}\varepsilon$. Prendiamo ora $z \in x+U_I(\varepsilon_0)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $|\lambda - \alpha| < \delta$, allora per ogni $i \in I$ si ha

$$\begin{aligned} p_i(\lambda z - \alpha x) &= p_i(\lambda z - \lambda x + \lambda x - \alpha x) \\ &\leq |\lambda| p_i(z - x) + |\lambda - \alpha| p_i(x) \\ &< |\lambda|\varepsilon_0 + \delta p_i(x) \\ &< (|\lambda - \alpha| + |\alpha|)\varepsilon_0 + \delta p_i(x) \\ &< (|\alpha| + \delta)\varepsilon_0 + 2^{-1}\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi $\lambda z \in \alpha x + U_I(\varepsilon) \subset \alpha x + U = U_{\alpha x}$. Questo prova che anche la moltiplicazione per scalari è continua. Dunque X è uno SVTLC.

Supponiamo ora $\mathcal{P}$ è separante. Sia $x \in X$, $x \neq 0$, allora $p_i(x) > 0$ per un qualche $i \in \mathcal{I}$ ed esiste un $n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $np_i(x) \geq 1$. Quindi $x \notin U_i(n^{-1})$ e di conseguenza $0 \in X$ non appartiene all'intorno $x - U_i(n^{-1})$ di x. Dunque $x \notin \overline{\{0\}}$ $\forall x \in X \setminus \{0\}$, ossia $\overline{\{0\}} = \{0\}$ che quindi è chiuso. Ma allora, essendo $\tau_{\mathcal{B}}$ invariante per traslazioni, ogni singoletto è chiuso, ossia X è T1. □

Teorema 3.2.11: *Sia X uno SVTLC su $\mathbb{K}$, allora esiste una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$ su X la cui topologia indotta $\tau_{\mathcal{P}}$ coincide con la topologia originaria di X. Se X è $T2$ allora tale famiglia di seminorme è anche separante.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Per il Lemma 3.1.11 esiste una base locale $\mathcal{B}$ di intorni aperti, convessi e bilanciati di $0 \in X$. Consideriamo la famiglia di seminorme $\mathcal{P} = \{p_C\}_{C\in\mathcal{B}}$ (sono seminorme per la Proposizione 3.2.7). Dico che

$$C = \{x \in X \mid p_C(x) < 1\} \ \ \forall C \in \mathcal{B}.$$

Fissiamo $C \in \mathcal{B}$. Se $x \in C$ esiste $t < 1$ t.c. $x \in tC$, in quanto C è aperto. Quindi $p_C(x) < 1$. Se invece $x \notin C$ la condizione $x \in tC$ implica $t \geq 1$, in quanto C è bilanciato, dunque $p_C(x) \geq 1$. Ora se prendiamo $\varepsilon > 0$, per quanto appena provato e dal fatto che p_C è una seminorma, si ha

$$|p_C(x) - p_C(y)| \leq p_C(x - y) < \varepsilon$$

se $x - y \in \varepsilon C$ per ogni $C \in \mathcal{B}$, dunque p_C è continua. Infine se X è $T2$ e $x \in X$ e $x \neq 0$, allora $x \notin C$ per un qualche $C \in \mathcal{B}$ e per questo C si ha $p_C(x) \geq 1$. Quindi $\mathcal{P}$ è separante.

Consideriamo la topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ (indotta su X dalla famiglia di seminorme $\mathcal{P}$ come nel Teorema 3.2.10) e confrontiamola con la topologia τ originaria di X. $\tau_{\mathcal{P}}$ è la meno fine topologia che rende continue le seminorme di $\mathcal{P}$, dunque per quanto appena dimostrato vale necessariamente $\tau_{\mathcal{P}} \subset \tau$. Viceversa se $C \in \mathcal{B}$, allora

$$C = \{x \in X \mid p_C(x) < 1\} = V(p_C, 1)$$

dunque $C \in \tau_{\mathcal{P}}$ e questo vale per ogni $C \in \mathcal{B}$, quindi $\tau \subset \tau_{\mathcal{P}}$. □

Corollario 3.2.12: *Sia X uno SVT. Allora:*

- *X è SVTLC se e solo se la sua topologia è indotta da una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$;*
- *X è SVTLC $T2$ se e solo se la sua topologia è indotta da una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$ separante.*

3.3 Funzioni Lineari su SVT

Analogamente a quanto fatto per gli spazi normati diamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.3.1: Siano X, Y due SVT su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, chiamiamo

$$\mathrm{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \,|T \text{ lineare e continuo}\}$$

lo spazio degli operatori lineari continui da X a Y. E per i funzionali

$$X' = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineare}\}$$

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineare e continuo}\}$$

gli spazi duale algebrico e duale di X.

Iniziamo studiando i funzionali lineari su uno SVT.

Proposizione 3.3.2: *Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$ ed $f \in X'$ un funzionale lineare non nullo. Sono equivalenti*

(1) f è continuo;

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ è chiuso;

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ è non denso in X;

(4) f è limitato in un intorno di $0 \in X$;

(5) f è limitato su un aperto di X.

Dimostrazione. (Facolativo) Essendo $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ e $\{0\}$ chiuso in $\mathbb{K}$ segue che (1) $\Rightarrow$ (2). Se $\mathrm{Ker}(f)$ è chiuso allora non può essere denso, altrimenti f sarebbe il funzionale nullo per continuità, dunque (2) $\Rightarrow$ (3). Se $\mathrm{Ker}(f)$ non è denso in X allora il suo complementare $X \setminus \mathrm{Ker}(f)$ è non vuoto e con parte interna non vuota, quindi esiste un $x \in X \setminus \mathrm{Ker}(f)$ e, per il Lemma 3.1.11, esiste un intorno bilanciato di $0 \in X$, V, t.c.

$$(x + V) \cap \mathrm{Ker}(f) = \emptyset.$$

Notiamo che anche $f(V)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}$. Se $f(V)$ è limitato allora si ha (4). Se invece non è limitato, essendo bilanciato, vale $f(V) = \mathbb{K}$ ed in particolare esiste un $y \in V$ t.c. $\langle f, y\rangle = -\langle f, x\rangle$ da cui $x + y \in (x + V) \cap \mathrm{Ker}(f)$ che contraddice è un assurdo per scelta di x. Quindi (3) $\Rightarrow$ (4). Dimostriamo che (4) $\Rightarrow$ (1). Se vale (4) allora esiste un V intorno di $0 \in X$ ed un $M > 0$ t.c.

$$|\langle f, x\rangle| < M \quad \forall x \in V.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo $U = \frac{\varepsilon}{M} V$, allora si vede che $|\langle f, x\rangle| < \varepsilon \ \ \forall x \in U$, ossia f è continua nell'origine. Questo basta per concludere la continuità su tutto X. Infatti fissiamo un qualsiasi $x \in X$ e un qualsiasi intorno U di $\langle f, x\rangle \in \mathbb{K}$, allora essendo $\mathbb{K}$ stesso uno SVT esiste un intorno W di $0 \in \mathbb{K}$ t.c. $U = \langle f, x\rangle + W$ e per continuità in $0 \in X$ di f esiste un intorno V di $0 \in X$ t.c. $f(V) \subset W$. Di conseguenza, per linearità di f, vale $f(x + V) \subset \langle f, x\rangle + W = U$. Dunque f è continua in x, che implica (1).

Infine dimostriamo l'equivalenza tra (4) e (5). L'implicazione (4) $\Rightarrow$ (5) è ovvia. Viceversa se $U \subset X$ è un aperto su cui f è limitato allora preso $x \in U$ qualsiasi vale che $-x + U$ è un intorno aperto di 0 in cui f è limitata, infatti

$$\langle f, -x + u\rangle = -\langle f, x\rangle + \langle f, u\rangle \le -\langle f, x\rangle + M \quad \forall u \in U$$

in cui $M > 0$ è una costante t.c. $\langle f, u\rangle \le M \quad \forall u \in U$. □

Corollario 3.3.3: *Sia $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è una famiglia di seminorme su X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Allora $\tau_{\mathcal{P}}$, la topologia su X indotta da $\mathcal{P}$, è la topologia meno fine su X che rende continue le seminorme in $\mathcal{P}$.*

Dimostrazione. La continuità è semplice conseguenza della Proposizione precedente infatti per ogni $i \in \mathcal{I}$, p_i è limitata in ogni intorno di 0 del tipo $U_i(\varepsilon) \in \tau_{\mathcal{P}}$. Inoltre una qualsiasi topologia che rende continue le seminorme in $\mathcal{P}$ deve necessariamente contenere gli insiemi del tipo $U_I(\varepsilon)$, dunque deve contenere la topologia $\tau_{\mathcal{P}}$. □

Come abbiamo visto la continuità di un funzionale definito su un spazio normato equivale all'essere dominato dalla norma (a meno di una costante positiva), la prossima proposizione ci dà un analogo di questo fatto nel caso in cui il funzionale è definito su uno SVTLC, la cui topologia è quindi indotta da una famiglia di seminorme (dai fatti della sezione precedente). Sarà ancora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 3.3.4: *Siano X, Y SVTLC su $\mathbb{K}$ con topologia indotta rispettivamente dalle famiglie di seminorme $\{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ e $\{q_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. Sia $L : X \to Y$ una funzione lineare, sono equivalenti:*

(1) L è continua;

(2) per ogni $j \in \mathcal{J}$ esistono $I_j \in \mathcal{I}^\#$ ed $M_j > 0$ t.c.

$$q_j(Lx) \le M_j \max_{i\in I_j} p_i(x) \quad \forall x \in X.$$

Se inoltre $\mathcal{J}$ è totalmente ordinato e la famiglia di seminorme $\{q_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ è crescente rispetto a tale ordine allora la condizione (2) equivale alla seguente:

(2') per ogni $j \in \mathcal{J}$ esistono $i_j \in \mathcal{I}$ ed $M_j > 0$ t.c.

$$q_j(Lx) \le M_j p_{i_j}(x) \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Supponiamo valga (2). Essendo le p_i continue, per la Proposizione 3.3.2, sono limitate in un intorno di $0 \in X$, quindi preso W un intorno di 0 in Y, esiste un elemento di base locale contenuto in W, ossia esistono $J \subset \mathcal{J}^\#$ e $\varepsilon > 0$ (Teorema 3.2.10) t.c.

$$\{y \in Y \mid \max_{j\in J} q_j(y) < \varepsilon\} \subset W.$$

Ora per il punto (2) per ogni $j \in J$ possiamo trovare $M_j > 0$ e $I_j \in \mathcal{I}^\#$ finito t.c.

$$q_j(y) \le M_j \max_{i\in I_j} p_i(x) \quad \forall x \in X$$

e prendendo per ogni $j \in J$ l'intorno di 0 in X

$$V_j = \{x \in X \mid p_i(x) < \varepsilon M_j^{-1} \quad \forall i \in I_j\}$$

vale che $U = \bigcap_{j \in J'} V_j$ è intorno di 0 in X e

$$L(U) \subset W$$

dunque f è continua in 0 e quindi ovunque essendo lineare.

Viceversa supponiamo valga (1). Preso $j \in \mathscr{J}$ esiste un $\gamma_j > 0$ ed un $I_j \in \mathscr{I}^\#$ finito t.c. se

$$V_j = \bigcap_{i \in I_j} \{x \in X \mid p_i(x) \leq \gamma_j\} = \{x \in X \mid \max_{i \in I_j} p_i(x) \leq \gamma_j\}$$

vale

$$L(V_j) \subset \{y \in Y \mid q_j(y) \leq 1\}$$

allora si ha

$$q_j(Lx) \leq \gamma_j^{-1} \max_{i \in I_j} p_i(x) \ \ \forall x \in X$$

che è quanto voluto per l'arbitrarietà di $j \in \mathscr{J}$. Infatti, fissati $x \in X$ e $j \in \mathscr{J}$:

- se $p_i(x) = 0$ per ogni $i \in I_j$ allora si ha

  $$p_i(mx) = m p_i(x) = 0 \ \ \forall i \in I_j \ \ \forall m \in \mathbb{N}$$

  dunque $mx \in U \ \ \forall m \in \mathbb{N}$ e quindi

  $$m q_j(Lx) = q_j(mLx) \leq 1 \ \ \forall m \in \mathbb{N}$$

  da cui segue $q_j(Lx) = 0$, dunque in tal caso la disuguaglianza è vera ed è un uguaglianza;

- se invece $\max_{i \in I_j} p_i(x) > 0$ vale

  $$p_i\left(\frac{\gamma_j x}{\max_{i \in I_j} p_i(x)}\right) \leq \gamma_j \ \ \forall i \in I_j$$

  ossia $\frac{\gamma_j x}{\max_{i \in I_j} p_i(x)} \in V_j$ e quindi

  $$\frac{\gamma_j}{\max_{i \in I_j} p_i(x)} q_j(Lx) = q_j\left(L\left[\frac{\gamma_j x}{\max_{i \in I_j} p_i(x)}\right]\right) \leq 1$$

  da cui quanto voluto.

□

Un immediato corollario è il seguente.

Proposizione 3.3.5: *Sia X SVTLC su $\mathbb{K}$, la cui topologia è indotta dalla famiglia di seminorme $\{p_i\}_{i \in \mathscr{I}}$. Allora per $\phi : X \to \mathbb{K}$ funzionale lineare, sono equivalenti*

(1) ϕ è continua;

(2) esistono $n \in \mathbb{N}$, $I \in \mathscr{I}^\#$ ed un $K > 0$ t.c.

$$|\langle \phi, x \rangle| \leq K \max_{i \in I} p_i(x) \ \ \forall x \in X.$$

3.4 Limitatezza in SVT

Definizione 3.4.1: Sia X SVT e siano $A, B \subset X$. Se $\exists t > 0$ t.c. $A \subset tB$ diremo che A è *assorbito* da B e che B *assorbe* A.

Definizione 3.4.2 (Insieme limitato): Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$ ed $\mathcal{B}$ una sua base locale di intorni. Un sottoinsieme $S \subset X$ è *limitato* se $\forall U \in \mathcal{B}\ \ \exists t > 0$ t.c. $S \subset tU$. In parole se S è assorbito da ogni intorno di $0 \in X$.

Osservazione 3.4.3: Nel contesto della definizione precedente S è limitato se e solo se $\forall U \in \mathcal{B}\ \ \exists t > 0$ t.c. $\forall t \geq t\ \ S \subset t'U$.

Osservazione 3.4.4: La definizione precedente non dipende dalla scelta della base locale scelta.

Osservazione 3.4.5: Se $(X, \|.\|)$ è uno spazio normato, allora $S \subset X$ è limitato se e solo se $\exists R > 0$ t.c. $S \subset B(0, R)$.

Proposizione 3.4.6: *Sia X SVT su $\mathbb{K}$. Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) Se $S \subset X$ è limitato allora anche $\overline{S}$ è limitato;

(2) se $S_1, S_2 \subset X$ sono limitati allora anche $S_1 \cup S_2$ è limitato;

(3) se $Y \subset X$ è sottospazio lineare e $S \subset Y$ allora S è limitato in Y se e solo se lo è in X.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base locale di intorni di X.

(1) Vale $\overline{S} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} (S+V)$. Ora per continuità della somma esistono $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $V_1+V_2 \subset U$, sia $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}$ in modo che $V + V \subset U$. Per limitatezza di S esiste $t > 0$ t.c. $S \subset tV$ ed a meno di prendere il massimo tra t e 1 posso supporre $t \geq 1$. Dunque

$$\overline{S} \subset S + V \subset tV + V \subset tV + tV \subset tU.$$

(2) Sia $U \in \mathcal{B}$ e siano $t_1, t_2 > 0$ t.c. $S_1 \subset t_1 U$ e $S_2 \subset t_2 U$. Allora se $t = \max\{t_1, t_2\}$ vale $S_1 \cup S_2 \subset tU$.

(3) Supponiamo che S sia limitato in X. Sia $\mathcal{B}_Y$ la base locale di intorni per Y ottenuta da $\mathcal{B}$ intersecando con Y. Sia $V \in \mathcal{B}_Y$, allora $\exists U \in \mathcal{B}$ t.c. $V = U \cap Y$. Per limitatezza in X esiste un $t > 0$ t.c. $S \subset tU$, allora

$$S \subset tU \cap Y = t(U \cap Y) = tV$$

infatti se $y \in tU \cap Y$ allora esiste $u \in U$ t.c. $y = tu$, dunque $u = t^{-1}y \in Y$ e quindi $y \in t(U \cap Y)$. Di conseguenza $tU \cap Y \subset t(U \cap Y)$. L'inclusione opposta è ovvia essendo Y sottospazio lineare.

$\square$

Proposizione 3.4.7: *Siano X, Y SVT su $\mathbb{K}$ e $T : X \to Y$ lineare continua. Se $S \subset X$ è limitato allora anche $T(S)$ è limitato.*

Dimostrazione. Sia $V \subset Y$ un intorno dell'origine di Y. Allora, per continuità, $T^{-1}(V)$ è intorno dell'origine di X e quindi esiste $t > 0$ t.c. $S \subset tT^{-1}(V)$, ma allora $T(S) \subset tV$. □

Proposizione 3.4.8: *Sia X SVT su $\mathbb{K}$. Un $S \subset X$ è limitato se e solo se $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ successione e $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ successione infinitesima vale $a_n x_n \to 0 \in X$ in X.*

Dimostrazione. Prendiamo $\mathcal{B}$ una base locale di intorni bilanciati (esiste per il Lemma 3.1.11). Supponiamo S limitato, allora per ogni $U \in \mathcal{B}$ esiste un $t > 0$ t.c. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S \subset tU$, ossia $\frac{1}{t}x_n \in U \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ e siccome definitivamente vale $|a_n| < \frac{1}{t}$, definitivamente abbiamo $t|a_n| < 1$. Di conseguenza essendo U bilanciato, definitivamente

$$a_n x_n = (ta_n)\frac{1}{t}x_n \in U$$

ossia $a_n x_n \to 0 \in X$.

Viceversa se S non è limitato, esiste un $U \in \mathcal{B}$ t.c. $S \not\subset nU \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$, dunque esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+} \subset S$ t.c. $x_n \notin nU \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$. Di conseguenza $\frac{1}{n}x_n \not\to 0 \in X$. □

Proposizione 3.4.9: *Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato e $S \subset X$. Allora S è limitato se e solo se*

$$\sup_{s\in S} \|s\| < +\infty.$$

Dimostrazione. Supponiamo S limitato e consideriamo $B(0,1) \subset X$, esiste $t > 0$ t.c. $S \subset tB(0,1) = B(0,t)$, dunque $\sup_{s\in S} \|s\| \leq t < +\infty$. Viceversa cosideriamo la base locale di intorni $\mathcal{B} = \{B(0,r)\}_{r>0}$ e prendiamo $R > \sup_{s\in S} \|s\|$. Allora per ogni $r > 0$ si ha

$$S \subset B(0,R) = \frac{R}{r}B(0,r)$$

da cui la tesi essendo $\frac{R}{r} > 0$. □

Proposizione 3.4.10: *Siano X uno SVTLC su $\mathbb{K}$ la cui topologia è indotta dalla famiglia di seminorme $\mathcal{P}$. Allora $S \subset X$ è limitato se e solo se*

$$\sup_{x\in S} p(x) < +\infty \ \ \forall p \in \mathcal{P}.$$

Dimostrazione. Supponiamo $S \subset X$ limitato e fissiamo $p \in \mathcal{P}$. Essendo $V(p,1)$ (definito come nell'Eq.(3.1)) un intorno di $0 \in X$, esisterà un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $S \subset nV(p,1)$, dunque $p(x) < n \ \ \forall x \in S$, da cui quanto voluto. Viceversa prendiamo U un qualsiasi intorno di $0 \in X$, allora esiste un aperto di base $V(p_1, n_1) \cap ... \cap V(p_m, n_m)$ t.c.

$$U \supset V(p_1, n_1) \cap ... \cap V(p_m, n_m).$$

Siano $\{M_i\}_{i=1,...,m}$ t.c. $\sup_{x\in S} p_i(x) < M_i \ \ \forall i = 1,...,m$. Quindi se $n > \max_{1\leq i\leq m} M_i n_i$ allora $S \subset nU$, da cui segue che S è limitato. □

Definizione 3.4.11: Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è detta *di Cauchy* se

$$\forall U \text{ intorno di } 0 \in X \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \ \forall p,q \geq n \ \ x_p - x_q \in U.$$

Inoltre X è detto *completo* se ogni sua successione di Cauchy converge in X.

Osservazione 3.4.12: Ovviamente se X è spazio normato ritroviamo l'usuale definizione di successione di Cauchy in spazi metrici.

Osservazione 3.4.13: Se X è SVT e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente in X, allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in X.

Infatti sia $x_n \to x \in X$. Presi U, V intorni di $0 \in X$ t.c. $V - V \subset U$ vale che $x + V$ è intorno di x e quindi $x_n \in (x + V)$ definitivamente. Ma allora definitivamente vale

$$x_p - x_q \in (x + V) - (x + V) = V - V \subset U.$$

Proposizione 3.4.14: *Sia X uno SVT su $\mathbb{K}$. Una successione di Cauchy in X è limitata in X.*

Dimostrazione. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy e U, V due intorni bilanciati di $0 \in X$ t.c. $V + V \subset U$. Per definizione di successione di Cauchy esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ vale $x_n \in x_N + V$. Prendiamo $s > 1$ t.c. $x_N \in sV$, allora per ogni $n \geq N$ vale

$$x_n \in sV + V \subset sV + sV \subset sU$$

quindi $x_n \in tU \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ per t sufficientemente grande. □

3.5 SVT di dimensione finita

Teorema 3.5.1 (di Riesz): *Sia X uno SVT $T2$ su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sono equivalenti:*

(1) X ha dimensione finita;

(2) esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. X è linearmente omeomorfo a $\mathbb{K}^n$;

(3) X è localmente compatto.

Dimostrazione. Supponiamo che valga (1). Sia $\mathfrak{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ una base algebrica di X e consideriamo $\Psi_{\mathfrak{B}} : \mathbb{K}^n \to X$ l'isomorfismo lineare dato da

$$\Psi_{\mathfrak{B}}(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \ \ \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Questa mappa è lineare, bigettiva e continua (è composizione di prodotti e somme). Vediamo che è aperta, da cui segue che è un omeomorfismo. Consideriamo $B_{\mathbb{K}^n}$ la palla unitaria aperta di $\mathbb{K}^n$ e vediamo che $\Psi_{\mathfrak{B}}(B_{\mathbb{K}^n})$ è intorno di 0 in X (questo dimostra quanto voluto essendo X SVT). Sia V intorno bilanciato contenuto nell'aperto $X \setminus \Psi_{\mathfrak{B}}(\partial B_{\mathbb{K}^n})$ (X è $T2$ e $\partial B_{\mathbb{K}^n}$ è compatto in $\mathbb{K}^n$), allora

$$\Psi_{\mathfrak{B}}^{-1}(V) \subset \mathbb{K}^n \setminus \partial B_{K^n}$$

inoltre $\Psi_{\mathfrak{B}}^{-1}(V)$ è bilanciato e contiene lo $0 \in \mathbb{K}^n$, dunque è stellato con centro 0 (in particolare è connesso per archi). Ma allora necessariamente si ha è $\Psi_{\mathfrak{B}}^{-1}(V) \subset B_{\mathbb{K}^n}$ e quindi $V \subset \Psi_{\mathfrak{B}}(B_{\mathbb{K}^n})$. Quindi $\Psi_{\mathfrak{B}}(B_{\mathbb{K}^n})$ è effettiamente un intorno di $0 \in X$.

Ovviamente (2) implica (3). Vediamo che (3) implica (1). Supponiamo quindi X localmente compatto. Dico che sotto tali ipotesi X è N1, infatti se V è intorno compatto di $0 \in X$ allora $\{2^{-n}V\}_{n\in\mathbb{N}}$ è base di intorni (compatti) di $0 \in X$ perché presa $\mathscr{B}$ una base locale di intorni aperti bilanciati (esiste per la Proposizione 3.1.11) e $U \in \mathscr{B}$ allora vale

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n U \supset V$$

e per compattezza di V esisterà un $m \in \mathbb{N}$ t.c. $2^m U \supset V$ e quindi t.c. $2^{-m} V \subset U$, quindi è effettivamente una base di intorni di $0 \in X$. Inoltre poiché V è ricoperto da $\{x + \frac{1}{2}V\}_{x \in V}$ si ha l'esistenza di un $F \subset V$ finito t.c. $V \subset F + \frac{1}{2}V$. Sia $Y = \mathrm{span}(F)$, allora $\dim(Y) \leq |F| < +\infty$ e

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V$$

e iterando si trova

$$V \subset Y + 2^{-n}V \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare

$$V \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (Y + 2^{-n}V) = \overline{Y}$$

ma X è N1, dunque per ogni $x \in \overline{Y}$ esiste $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ t.c. $y_n \to x$. Ma Y ha dimensione finita dunque per quanto mostrato prima esiste un $n_Y \in \mathbb{N}$ t.c. Y è omeomorfo ad $\mathbb{K}^{n_Y}$, in particolare Y è completo e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, dunque $x \in Y$ necessariamente. Allora $\overline{Y} = Y$ ed inoltre essendo V assorbente (è intorno di $0 \in X$) vale $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV \subset \overline{Y} = Y$ (avevamo detto $V \subset \overline{Y}$ e questo è un sottospazio lineare) quindi $X = Y$ e quindi la tesi. □

Osservazione 3.5.2: Nel caso particolare in cui X sia uno spazio normato si ha che X ha dimensione finita se e solo se $\overline{B}_X$ è compatta.

3.6 Metrizzabilità di SVTLC

Teorema 3.6.1: *Uno SVTLC X topologizzato da una famiglia numerabile e separante di seminorme $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è metrizzabile attraverso una metrica invariante per traslazioni, ossia $\exists d : X \times X \to [0, +\infty)$ metrica su X t.c.*

$$d(x, x') = d(x + y, x' + y) \ \ \forall x, x', y \in X.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Sia $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ infinitesima. Dimostriamo che la funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ t.c.

$$d(x, x') = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n p_n(x - x')}{1 + p_n(x - x')}$$

è una metrica invariante per traslazioni su X che induce la topologia di X. Osserviamo innanzitutto che il massimo è effettivamente raggiunto in quanto $0 \leq \frac{p_n}{1+p_n} < 1$ su tutto $X \times X$ e $\alpha_n \to 0$, dunque $\frac{\alpha_n p_n}{1+p_n} \to 0$ (quindi il massimo viene raggiunto). Inoltre essendo $\alpha_n > 0$ per oni $n \in \mathbb{N}$ vale che $d(x, x') = 0$ implica $p_n(x - x') = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $x = x'$ (perché le seminorme sono separanti). Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare basta mostrare la seguente elementare disuguaglianza: se $a, b, c \in [0, +\infty)$ sono t.c. $a \leq b + c$ allora

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c},$$

che segue dalla crescenza della funzione $[0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{x}{1+x} \in [0, +\infty)$, infatti da questo segue

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Ora fissiamo un qualsiasi intorno di $x_0 \in X$ in X del tipo

$$U_J(x_0; \varepsilon) = \{x \in X \mid \max_{n \in J} p_n(x - x_0) < \varepsilon\}$$

con $J \subset \mathbb{N}$ finito (questi formano un sistema fondamentale di intorni per x in X al variare di $\varepsilon > 0$ e $J \subset \mathbb{N}$ finito). Dalla definizione di d si ha

$$\frac{\alpha_n p_n(x - x')}{1 + p_n(x - x')} \le d(x, x') \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x, x' \in X$$

ma allora se $x' \in B_d\left(x_0, \frac{m_n \varepsilon}{1+\varepsilon}\right) = \left\{y \in X \mid d(x_0, y) < \frac{m_n \varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$, con $m_J = \min_{n \in J} \alpha_n$, segue che

$$\frac{\alpha_n p_n(x_0 - x')}{1 + p_n(x_0 - x')} \le d(x_0, x') < \frac{m_n \varepsilon}{1 + \varepsilon} \;\; \forall n \in J$$

da cui

$$\frac{p_n(x_0 - x')}{1 + p_n(x_0 - x')} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \;\; \forall n \in J$$

che per stretta crescenza di $[0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{x}{1+x} \in [0, +\infty)$ avviene se e solo se

$$p_n(x_0 - x') < \varepsilon \;\; \forall n \in J.$$

Ossia $B_d\left(x_0, \frac{m_n \varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \subset U_J(x_0; \varepsilon)$ che, per l'arbitrarietà di $x_0 \in X$ e di $J \subset \mathbb{N}$ finito, prova che la topologia della metrica d è fine almeno quanto quella originaria di X.

D'altra parte fissiamo qualsiasi $x_0 \in X$ e prendiamo $\varepsilon > 0$ e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $\alpha_n < \varepsilon \;\; \forall n > n_\varepsilon$. Allora si ha

$$\begin{aligned} d(x, x') &\le \max_{n > n_\varepsilon} \frac{\alpha_n p_n(x_0 - x')}{1 + p_n(x_0 - x')} + \max_{0 \le n \le n_\varepsilon} \frac{\alpha_n p_n(x_0 - x')}{1 + p_n(x_0 - x')} \\ &\le \varepsilon + \max_{0 \le n \le n_\varepsilon} \frac{\alpha_n p_n(x_0 - x')}{1 + p_n(x_0 - x')} \le \varepsilon + M \max_{0 \le n \le n_\varepsilon} p_n(x_0 - x'). \end{aligned}$$

con $M = \max_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$. Quindi l'intorno di $x_0 \in X$

$$U_{\{0, \dots, n_\varepsilon\}}(x_0, \varepsilon)\{x' \in X \mid \max_{0 \le n \le n_\varepsilon} p_n(x' - x_0) < \varepsilon\}$$

è contenuto nella palla metrica $B_d\,(x_0, (1 + M)\varepsilon)$. Questo prova che la topologia originaria di X è fine almeno quanto quella indotta dalla metrica d. Si ha quindi la tesi. □

Definizione 3.6.2: Uno SVTLC metrizzabile e completo è detto *spazio di Frechét*.

3.7 Limiti Induttivi di SVT

Fissiamo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di SVT t.c. $X_n \subset X_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e con inclusioni $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ continue. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissiamo $\mathscr{B}_n$ una base locale di intorni bilanciati per X_n (esiste sempre per il Lemma 3.1.11).

Denoteremo

$$X_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Inoltre data una famiglia di insiemi in uno SVT $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sarà

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} S_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S_1 + S_2 + \ldots + S_n).$$

Quindi denotiamo

$$\mathscr{B}_\infty = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} V_i \mid V_i \in \mathscr{B}_i \;\; \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teorema 3.7.1: *La famiglia $\mathscr{B}_\infty$ è base locale di intorni di una topologia da SVT su X_∞ che rende continue le inclusioni $X_n \hookrightarrow X_\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che se $\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i, \sum_{i\in\mathbb{N}} V_i' \in \mathscr{B}_\infty$ allora

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i\right) \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i'\right) \supset \sum_{i\in\mathbb{N}} (V_i \cap V_i') \tag{3.2}$$

$$V_i' + V_i' \subset V_i \ \ \forall i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i'\right) + \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i'\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (V_i' + V_i') \subset \sum_{i\in\mathbb{N}} V_i \tag{3.3}$$

$$V_i \text{ è assorbente e bilanciato } \ \forall i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{i\in\mathbb{N}} V_i \text{ è assorbente e bilanciato} \tag{3.4}$$

da queste tre equazioni, grazie alla Proposizione 3.1.13, segue che esiste un'unica topologia da SVT su X_∞ con $\mathscr{B}_\infty$ come base locale di intorni dell'origine. Inoltre essendo

$$V_n \subset X_n \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i\right) \ \ \forall V_n \in \mathscr{B}_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha che ogni inclusione $X_n \hookrightarrow X_\infty$ è continua. □

Definizione 3.7.2 (Limite induttivo): Lo spazio X_∞ munito della topologia τ_∞ indotta dalla base locale $\mathscr{B}_\infty$ è detto *limite induttivo* degli spazi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e talvolta lo indicheremo con la notazione $\varinjlim X_n$.

Lemma 3.7.3: *Sia Y SVT con base locale di intorni $\mathscr{B}_Y$. Preso $V \in \mathscr{B}_Y$ allora $\exists \{V_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}_Y$ t.c. $\sum_{j\in\mathbb{N}} V_j \subset V$.*

Dimostrazione. Basta definire i V_j per ricorrenza nel seguente modo: sia $V_0 \in \mathscr{B}_Y$ t.c.

$$V_0 + V_0 \subset V$$

e per $n \in \mathbb{N}_+$ sia $V_{n+1} \in \mathscr{B}_Y$ t.c.

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n.$$

Allora vale

$$\begin{aligned} V &\supset V_0 + V_0 \supset V_0 + V_1 + V_1 \supset \ldots \\ &\ldots \supset V_0 + V_1 + \ldots + V_n + V_n \supset V_0 + V_1 + \ldots + V_n \end{aligned}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia

$$V \supset \sum_{j\in\mathbb{N}} V_j.$$

□

Teorema 3.7.4 (Proprietà universale del limite induttivo): *Sia Y SVT con base locale $\mathscr{B}_Y$. Allora per ogni $L : X_\infty \to Y$ lineare vale che L è continua se e solo se $L_{|X_n} : X_n \to Y$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Inoltre la topologia τ_∞ è la massima topologia su X_∞, tra quelle da SVT, che rende continue le inclusioni $X_n \hookrightarrow X_\infty$. In particolare τ_∞ non dipende dalle basi locali di intorni $\mathscr{B}_n$ scelte per gli X_n.

Dimostrazione. Se L è continua, essendo le inclusioni continue allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ è continua anche la restrizione $L_{|X_n}$ (è la composizione tra l'inclusione $X_n \hookrightarrow X_\infty$ ed L). Viceversa supponiamo $L_{|X_n}$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $V \in \mathscr{B}_Y$ e per il Lemma 3.7.3 si ha l'esistenza di insiemi $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}_Y$ t.c.

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} V_j \subset V,$$

per continuità si ha che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste un $U_j \in \mathscr{B}_j$ t.c. $L(U_j) \subset V_j$, quindi $\sum_{j\in\mathbb{N}} U_j \in \mathscr{B}_\infty$ e

$$L\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} U_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} L(U_j) \subset \sum_{j\in\mathbb{N}} V_j \subset V$$

da cui segue la continuità di L per l'arbitrarietà di $V \in \mathscr{B}_Y$.

Dimostriamo adesso la massimalità della topologia. Per farlo basta considerare $L = \mathrm{Id}_{X_\infty} : (X_\infty, \tau_\infty) \to (X_\infty, \tau)$ con qualunque τ topologia da SVT su X che renda continue le inclusioni $X_n \hookrightarrow X_\infty$. Allora le restrizioni $L_{|X_n}$ sono proprio le inclusioni $X_n \hookrightarrow X_\infty$ e sono quindi continue, dunque L è continua (per quanto dimostrato precedentemente) e si ha che $\tau \subset \tau_\infty$. □

Osservazione 3.7.5: In generale non vale l'uguaglianza:

$$\tau_\infty = \{A \subset X_\infty \mid A \cap X_n \text{ aperto in } X_n\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposizione 3.7.6: *Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ lo spazio X_n è SVTLC allora anche X_∞ con la topologia da limite induttivo è SVTLC. Inoltre in tal caso una base locale in intorni è data anche da*

$$\mathscr{B}_\infty^{lc} = \{U \subset X_\infty \mid U \cap X_n \textit{ è intorno convesso di } 0 \textit{ in } X_n\}.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 3.1.11 sappiamo che possiamo prendere le basi locali $\mathscr{B}_n$ tutte fatte da intorni dell'origine bilanciati e convessi, la tesi segue quindi notando che:

$$V_i \text{ è assorbente bilanciato e convesso } \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} V_i \text{ è assorbente, bilanciato e convesso.}$$

Vediamo ora che $\mathscr{B}_\infty^{lc}$ è base locale di intorni. Se $U \in \mathscr{B}_\infty^{lc}$ allora per convessità

$$U \supset \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i-1}(U \cap X_i) \in \mathscr{B}_\infty$$

infatti se $x \in \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i-1}(U \cap X_i)$, allora esiste un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $x = \sum_{i=0}^n 2^{-i-1}x_i$ per qualche $x_i \in U \cap X_i$ per $i \in \{1, ..., n\}$, ma allora $x = \sum_{i=0}^n 2^{-i-1}x_i + 0(1 - \sum_{i=0}^n 2^{-i-1})$ è combinazione convessa di elementi di U ($0 \in U$) e quindi $x \in U$. Dunque U è intorno di 0 in X_∞, ossia $\mathscr{B}_\infty^{lc}$ è una famiglia di intorni di 0. Invece un U intorno 0 in X_∞ contiene un $U' = \sum_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \mathscr{B}_\infty$ con $V_i \in \mathscr{B}_i$ convesso per ogni $i \in \mathbb{N}$ (posso prendere le basi locali $\mathscr{B}_i$ fatte da intorni convessi), ma allora U' stesso è convesso e di conseguenza $U' \cap X_n$ è intorno convesso di 0 in X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $U' \in \mathscr{B}_\infty^{lc}$. Quindi, essendo $\mathscr{B}_\infty$ base locale di intorni, $\mathscr{B}_\infty^{lc}$ è una base locale di intorni di X_∞. □

Osservazione 3.7.7: La costruzione di $\varinjlim X_n$ è invariante per sottosuccessioni, ossia per qualsiasi successione strettamente crescente di indici $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ vale

$$\varinjlim X_{n_j} = \varinjlim X_n.$$

Definizione 3.7.8 (Limite induttivo stretto): Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ la topologia di X_n è esattamente quella ottenuta come sottospazio topologico di X_{n+1}, allora il limite induttivo $\varinjlim X_n$ viene detto *limite induttivo stretto*. Quando il limite induttivo è stretto lo indicheremo con $\varinjlim^s X_n$.

Osservazione 3.7.9: Il caso di limite induttivo stretto è proprio quello considerato inizialmente da J. Dieudonné e da L. Schwartz. In seguito poi è stato generalizzato da A. Grothendieck.

Lemma 3.7.10: *Sia $X_\infty = \varinjlim^s X_n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $U_n \in \mathscr{B}_n$. Allora esistono $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $V_n \in \mathscr{B}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, t.c. $V_n \subset U_n$ e $X_n \cap (V_{n+1} + V_{n+1}) \subset V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Segue che:*

$$X_n \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i \right) \subset V_n + \sum_{i=0}^{n} V_i \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. L'esistenza dei V_n con tali proprietà segue dalla continuità della somma e dal fatto che, essendo il limite induttivo stretto, la topologia di X_n è quella da sottospazio topologico indotta da X_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $n \in \mathbb{N}$ la successione di insiemi $\left(X_n \cap \left(V_k + \sum_{j=0}^{k} V_j\right)\right)_{k\geq n}$ è decrescente per inclusione, infatti per $k \geq n$ vale

$$\begin{aligned} X_n \cap \left(V_{k+1} + \sum_{j=0}^{k+1} V_j \right) &= X_n \cap \left[X_k \cap \left(V_{k+1} + V_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} V_j \right) \right] \\ &= X_n \cap \left[X_k \cap (V_{k+1} + V_{k+1}) + \sum_{j=0}^{k} V_j \right] \\ &\subset X_n \cap \left[V_k + \sum_{j=0}^{k} V_j \right] \end{aligned}$$

in cui si è usato nella prima uguaglianza che $X_n \subset X_k$ per $k \geq n$, nella seconda che $\sum_{j=0}^{k} V_j \subset X_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e nel terzo passaggio che $X_k \cap (V_{k+1} + V_{k+1}) \subset V_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza per $k \geq n$ si ha

$$\begin{aligned} X_n \cap \left(\sum_{j=0}^{k} V_j \right) &\subset X_n \cap \left(V_k + \sum_{j=0}^{k} V_j \right) \\ &\subset X_n \cap \left(V_n + \sum_{j=0}^{n} V_j \right) = V_n + \sum_{j=0}^{n} V_j \end{aligned}$$

da cui segue la tesi per l'arbitrarietà di $k \geq n$. □

Proposizione 3.7.11: *Sia $X_\infty = \varinjlim^s X_n$, allora:*

(1) *la topologia di X_n è esattamente quella da sottospazio topologico in X_∞;*

(2) *sia $n_0 \in \mathbb{N}$, un $C \subset X_{n_0}$ è chiuso in X_∞ se e solo se C è chiuso in X_n per ogni $n \geq n_0$ (in particolare se X_n è chiuso in X_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora X_n è chiuso in X_∞ per ogni $n \in \mathbb{N}$);*

(3) *se X_n è T2 per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora anche X_∞ è T2;*

(4) *se X_n è chiuso in X_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $A \subset X_\infty$ è limitato se e solo se esiste un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $A \subset X_n$ e A è limitato in X_n.*

Dimostrazione. (1) Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Se $U \in \mathscr{B}_n$, grazie al Lemma 3.7.10, si possono prendere $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $V_i \in \mathscr{B}_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ t.c. $V_n + \sum_{i=0}^n V_i \subset U$ e

$$X_n \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i\right) \subset V_n + \sum_{i=0}^n V_i$$

(possiamo prenderli così perché: esistono per continuità della somma degli $U_i \in \mathscr{B}_i$ per ogni $i < n$ e $W_n, W_n' \in \mathscr{B}_n$ t.c. $W_n' + W_n + \sum_{i=1}^{n-1} U_i \subset U$, poi prendiamo $U_n = W_n \cap W_n'$ e applichiamo il Lemma 3.7.10 con tali U_i per $i \leq n$ e $U_i = X_i$ per $i > n$) per cui

$$X_n \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i\right) \subset U$$

da cui segue che X_∞ induce su X_n proprio la topologia originaria di X_n.

(2) se $C \subset X_{n_0}$ ed è chiuso in ogni X_n con $n \geq n_0$ allora è anche chiuso in X_∞. Infatti se $x \in X_\infty$, $x \notin C$, allora $x \in X_{n_1}$ con $n_1 \geq n_0$. Ma C è chiuso in X_{n_1}, dunque esiste U intorno di x in X_{n_1} disgiunto da C ed essendo X_{n_1} sottospazio topologico (per (1)) di X_∞ si può prendere U della forma

$$U = V \cap X_{n_1}$$

con V aperto in X_∞ e vale $x \in V$, $V \cap C = \emptyset$ (perché $C \subset X_{n_0}$). Quindi C^c è aperto in X_∞. Il viceversa è ovvio grazie al punto (1).

(3) Sia $C = \{0\}$. Se tutti gli X_n sono $T2$ si ha che C è chiuso in X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi anche in X_∞ per il punto (2). Quindi X_∞ è T1.

(4) Un $A \subset X_n$ è limitato in X_n se e solo se è limitato in X_∞ (in quanto la topologia di X_n è esattamente quella indotta da X_∞ come sottospazio topologico per (1)). Proviamo che se $A \subset X_\infty$ è limitato in X_∞ allora necessariamente esiste un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $A \subset X_n$, da cui segue la tesi per quanto appena osservato. Sia quindi $A \subset X_\infty$ t.c. $A \not\subset X_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, vediamo che non è limitato in X_∞. Esiste una successione strettamente crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ ed una successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c.

$$a_k \in X_{n_k} \setminus X_{n_{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

Siccome la costruzione di $\varinjlim^s X_n = X_\infty$ è invariante per sottosuccessioni si ha $X_\infty = \varinjlim^s X_{n_k}$ ed $X_{n_{k-1}}$ è chiuso in X_{n_k} per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, dunque possiamo assumere senza perdita di generalità $X_{n_k} = X_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Quindi $a_k \in X_k \setminus X_{k-1} \ \forall k \in \mathbb{N}_+$. Sia $k \in \mathbb{N}_+$, essendo X_{k-1} è chiuso in X_k, si può trovare un intorno $U_k \in \mathscr{B}_k$ t.c.

$$\left(\frac{a_k}{k} - U_k\right) \cap X_{k-1} = \emptyset$$

(infatti, essendo X_{k-1} sottospazio lineare e $a_k \notin X_{k-1}$, necessariamente $\frac{a_k}{k} \notin X_{k-1}$, ma X_{k-1}^c è aperto in X_k, da cui quanto voluto) ossia

$$\frac{a_k}{k} \notin U_k + X_{k-1}.$$

Adesso, usando il Lemma 3.7.10, prendiamo $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $V_k \in \mathscr{B}_k$, $V_k + V_k \subset U_k$ e

$$X_k \cap \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i\right) \subset V_k + \sum_{i=0}^k V_i$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned} X_k \cap \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i \right) &\subset V_k + \sum_{i=0}^{k} V_i \\ &= V_k + V_k + \sum_{j=0}^{k-1} V_j \\ &\subset V_k + V_k + X_{k-1} \\ &\subset U_k + X_{k-1} \end{aligned}$$

(in cui si è usato che $\sum_{j=0}^{k-1} V_i \subset X_{k-1} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_+$) per ogni $k \in \mathbb{N}_+$. Ma per ogni $k \in \mathbb{N}_+$ si ha $\frac{a_k}{k} \notin X_{k-1} + U_k$ (per scelta degli U_k), dunque $\frac{a_k}{k} \notin X_k \cap (\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i)$, ossia $\frac{a_k}{k} \notin \sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ e questo per ogni $k \in \mathbb{N}$, di conseguenza

$$A \ni a_k \notin k \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$$

da cui segue che $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$, che è intorno dell'origine di X_∞, non assorbe A, che quindi non è limitato in X_∞.

$\square$

4

Teorema di Hahn-Banach e Convessità

4.1 Forma Analitica del Teorema ed Alcune sue Conseguenze

Teorema 4.1.1 (di Hahn-Banach, forma analitica): *Siano X uno spazio vettoriale reale, $V \subset X$ un suo sottospazio lineare e $p : X \to \mathbb{R}$ sublineare. Sia $f : V \to \mathbb{R}$ lineare t.c. $f(x) \leq p(x)\ \ \forall x \in V$. Allora esiste $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ lineare che estende f e t.c. $\widetilde{f} \leq p$ su tutto X.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia di tutte le estensioni lineari possibili di f

$$\Gamma = \left\{ g : W \to \mathbb{R} \mid g \text{ lineare}, W \subset X \text{ sottospazio lineare}, g_{|V} = f, g \leq p \text{ su } W \right\}$$

e ordiniamola tramite l'inclusione dei grafici, cioè $g_1 \leq g_2 \iff \text{graph}(g_1) \subset \text{graph}(g_2)$ per ogni $g_1, g_2 \in \Gamma$. Ovviamente se $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottocatena di Γ la funzione $g = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ è un maggiorante, dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale $\widetilde{f} \in \Gamma$. Sia $\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \mathbb{R}$, dobbiamo dimostrare che $\widetilde{V} = X$ o equivalentemente che

$$\forall g \in \Gamma \ \ W = \text{dom}(g) \subsetneq X \Rightarrow g \text{ ammette estensione propria } g' \in \Gamma.$$

Sia quindi $g : W \to \mathbb{R}$, $g \in \Gamma$, con $W \subsetneq X$ e sia $x \in X \setminus W$. Vogliamo definire una $g' : W \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ t.c. $g' \in \Gamma$ e $g'_{|W} = g$. Poniamo

$$g'(v + tx) = g(v) + t\alpha \ \ \forall v \in W \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$g(v) + t\alpha \leq p(v + tx) \ \ \forall v \in W \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente che

$$\begin{cases} g(v) + t\alpha \leq p(v + tx) \\ g(u) - t\alpha \leq p(u - tx) \end{cases} \qquad \forall u, v \in W \ \ \forall t > 0$$

cioè

$$\begin{cases} t\alpha \leq p(v + tx) - g(v) \\ t\alpha \geq -p(u - tx) + g(u) \end{cases} \qquad \forall u, v \in W \ \ \forall t > 0$$

che sostituendo u con tu e v con tv diventa la condizione equivalente

$$-p(tu - tx) + g(tu) \leq t\alpha \leq p(tv + tx) - g(tv) \;\; \forall v \in W \;\; \forall t > 0$$

che vale a sua volta se e solo se

$$-p(u - x) + g(u) \leq \alpha \leq p(v + x) - g(v) \;\; \forall u, v \in W.$$

Dunque un tale α esiste purché

$$\sup_{u \in W} (-p(u - x) + g(u)) \leq \inf_{v \in W} (p(v + x) - g(v))$$

e questo è vero se e solo se

$$g(u) + g(v) \leq p(u - x) + p(v + x) \;\; \forall u, v \in W$$

che effettivamente vale perché presi comunque $u, v \in W$ si ha

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p((u - x) + (v + x)) \leq p(u - x) + p(v + x).$$

□

Corollario 4.1.2 (Estensione di funzionali continui): *Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato reale, $Y \subset X$ un suo sottospazio lineare ed $f \in Y^*$. Allora f si estende ad una $\widetilde{f} \in X^*$ t.c. $\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.*

Dimostrazione. Consideriamo $p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$. Allora

$$\langle f, y \rangle \leq \|f\|_{Y^*}\|y\| = p(y) \;\; \forall y \in Y$$

e per il Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach vi è una $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ t.c.

$$|\langle \widetilde{f}, x \rangle| \leq p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\| \;\; \forall x \in X$$

da cui segue $\|\widetilde{f}\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$, ma vale anche che

$$\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \langle \widetilde{f}, x \rangle \geq \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \leq 1}} \langle \widetilde{f}, y \rangle = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \leq 1}} \langle f, y \rangle = \|f\|_{Y^*}$$

da cui la tesi. □

Corollario 4.1.3 (Estensione di funzionali continui, caso complesso): *Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato complesso, $Y \subset X$ un suo sottospazio lineare ed $f \in Y^*$. Allora f si estende ad una $\widetilde{f} \in X^*$ t.c. $\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.*

Dimostrazione. Considero $f_0 = \mathrm{Re} f : Y \to \mathbb{R}$ che è $\mathbb{R}$-lineare e continua. Per il Corollario 4.1.2 esiste $\widetilde{f_0} : X \to \mathbb{R}$ che estende f_0 e t.c. $\|\widetilde{f_0}\|_{X^*,\mathbb{R}} = \|f_0\|_{Y^*,\mathbb{R}}$. Definiamo adesso $\widetilde{f} : X \to \mathbb{C}$ via

$$\langle \widetilde{f}, x \rangle = \langle \widetilde{f_0}, x \rangle - i \langle \widetilde{f_0}, ix \rangle \;\; \forall x \in X$$

che è $\mathbb{C}$-lineare, estende f ($\forall z \in \mathbb{C}$ vale $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(iz)$) e per ogni $x \in X$ con $\widetilde{f}(x) \neq 0$, preso $\lambda = \frac{\overline{\langle \widetilde{f}, x \rangle}}{|\langle \widetilde{f}, x \rangle|}$, si ha

$$|\langle \widetilde{f}, x \rangle| = \lambda \langle \widetilde{f}, x \rangle = \langle \widetilde{f}, \lambda x \rangle = \langle \widetilde{f_0}, \lambda x \rangle \leq \|\widetilde{f_0}\|_{X^*,\mathbb{R}}\|\lambda x\| = \|f_0\|_{Y^*,\mathbb{R}}\|x\|$$

ma vale

$$\|f_0\|_{Y^*,\mathbb{R}} = \sup_{\|v\|\le 1} |\mathrm{Re}\langle f, v\rangle| \le \sup_{\|v\|\le 1} |\langle f, v\rangle| = \|f\|_{Y^*}$$

dunque

$$|\langle \widetilde{f}, x\rangle| \le \|f\|_{Y^*}\|x\|$$

da cui si ottiene $\|\widetilde{f}\|_{X^*} \le \|f\|_{Y^*}$ e si conclude come nel Corollario precedente. □

Osservazione 4.1.4: Ogni sottospazio lineare di dimensione finita di uno spazio normato ha sempre un addendo diretto chiuso.

Infatti preso $(X, \|.\|)$ spazio normato ed $Y \subset X$ sottospazio lineare chiuso di dimensione finita. Allora esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una base di Y $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$, quindi per ogni $y \in Y$ possiamo scrivere

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i(y) y_i$$

e per ogni $i = 1, ..., n$ la funzione $a_i : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ è lineare e continua, dunque si estende ad una $A_i \in X^*$ e quindi è facile notare che vale la somma diretta $X = Y \oplus N$ con $N = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(A_i)$.

Corollario 4.1.5 (Norma via funzionali): *Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $x \in X$. Consideriamo $Y = \mathbb{K}x$ e $f : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ definito da*

$$\langle f, \lambda x\rangle = \lambda\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

che è lineare e continuo e di norma unitaria. Allora vi è un $x^* \in X^*$ t.c. $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$ (cioè che estende f) e $\|x^*\|_{X^*} = 1$. In particolare si ha

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}=1}} |\langle f, x\rangle| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}\le 1}} |\langle f, x\rangle| \quad \forall x \in X. \tag{4.1}$$

Dimostrazione. La prima parte è conseguenza del Corollario 4.1.2 o del Corollario 4.1.3 a seconda di chi è $\mathbb{K}$. La (4.1) viene dalla prima parte insieme al fatto che

$$|\langle f, x\rangle| \le \|f\|_{X^*}\|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall f \in X^*$$

che implica

$$\|x\| \ge \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}=1}} |\langle f, x\rangle|$$

e anche

$$\|x\| \ge \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}\le 1}} |\langle f, x\rangle|$$

dalle quali, con l'esistenza di x^* prima provata, seguono le uguaglianze nell'eq. (4.1). □

Corollario 4.1.6: *Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $x \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) $x = 0 \in X$;

(2) $\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in X^*$ *con* $\|f\|_{X^*} \le 1$;

(3) $\langle f, x\rangle = 0 \ \ \forall f \in X^*$ *con* $\|f\|_{X^*} = 1$;

(4) $\langle f, x\rangle = 0 \ \ \forall f \in X^*$.

Corollario 4.1.7: *Siano* $(X, \|.\|)$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, $Z \subset X$ *un suo sottospazio lineare chiuso e* $g \in X \setminus Z$. *Allora esiste un* $\phi \in X^*$ *t.c.* $\|\phi\|_{X^*} = 1$, $\phi_{|Z} = 0$ *e* $\langle \phi, g\rangle = d(g, Z)$.

Dimostrazione. Consideriamo il quoziente X/Z e sia $\pi : X \to X/Z$ la proiezione sul quoziente. Per il Corollario 4.1.5 esiste un $\widetilde{\phi} \in (X/Z)^*$ t.c. $\|\widetilde{\phi}\|_{(X/Z)^*} = 1$ e $\langle \widetilde{\phi}, \pi g\rangle = \|\pi g\|_{X/Z}$. Dunque prendiamo $\phi = \widetilde{\phi} \circ \pi$, questo è continuo e lineare, quindi $\phi \in X^*$ e valgono

$$\|\phi\|_{X^*} = \sup_{x \in \overline{B}_X} |\langle \phi, x\rangle| = \sup_{x \in \overline{B}_X} |\langle \widetilde{\phi}, \pi x\rangle| = \sup_{y \in \overline{B}_{X/Z}} |\langle \widetilde{\phi}, y\rangle| = \|\widetilde{\phi}\|_{(X/Z)^*} = 1$$

e

$$\langle \phi, g\rangle = \langle \widetilde{\phi}, \pi g\rangle = \|\pi g\|_{X/Z} = d(g, Z).$$

□

Corollario 4.1.8: *Sia* H *uno spazio di Hilbert su* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, *con prodotto* $(. \cdot .)$ *e norma indotta* $\|.\|_H$. *Sia* $A \in \mathrm{L}(H)$, *allora vale*

$$\|A\|_{op} = \sup_{\substack{x, y \in H \\ \|x\|_H, \|y\|_H \leq 1}} (Ax \cdot y) = \sup_{\substack{x, y \in H \\ \|x\|_H, \|y\|_H = 1}} (Ax \cdot y).$$

Dimostrazione. Segue dal Corollario 4.1.6 e dal Teorema 2.4.2 di Riesz. □

4.2 Biduale, operatore aggiunto e annullatore

Definizione 4.2.1: Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dato uno spazio normato $(X, \|.\|)$ su $\mathbb{K}$, definiamo il suo *spazio biduale* come

$$X^{**} = (X^*)^* = \{\phi : X^* \to \mathbb{K} \mid \phi \text{ lineare e continuo}\}.$$

Corollario 4.2.2: *Sia* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Sia* $(X, \|.\|)$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$, *allora vi è un'inclusione isometrica*

$$\Phi : X \longrightarrow X^{**}$$

t.c. $\langle \Phi(x), f\rangle = \langle f, x\rangle \ \ \forall x \in X \ \ \forall f \in X^*$. *Nel seguito chiameremo tale mappa* immersione canonica per valutazioni nel biduale *o anche solo* immersione canonica per valutazioni *o* immersione canonica nel biduale

Dimostrazione. La funzione Φ è ben definita, infatti se $x \in X$ $\Phi(x)$ è ovviamente lineare e grazie al Corollario 4.1.5

$$\|\Phi(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |\langle \Phi(x), f\rangle| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|$$

dunque $\Phi(x)$ è effettivamente continua, ossia $\Phi(x) \in X^{**}$. Inoltre Φ è lineare e dall'equazione appena scritto si ha che preserva le norme, dunque è un'isometria. □

Osservazione 4.2.3: In generale l'immersione canonica per valutazioni Φ non è surgettiva, tale aspetto molto importante verrà studiato in uno dei capitoli successivi.

Nel seguito di questo scritto, dato un elemento x di uno spazio di Banach $(X, \|.\|)$, chiameremo ev_x l'operatore di valutazione in x.

Definizione 4.2.4: Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ due spazi normati e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Definiamo l'*operatore aggiunto, trasposto o duale* di T come $T^* : Y^* \to X^*$ t.c.

$$T^*(y^*) = y^* \circ T \ \ \forall y^* \in Y^*.$$

Proposizione 4.2.5: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ due spazi normati e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Allora l'operatore aggiunto $T^* : Y^* \to X^*$ è continuo con norma $\|T^*\|_{op} = \|T\|_{op}$.*

Dimostrazione. Grazie alla definizione di operatore aggiunto ed al Corollario 4.1.5 possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\|T^*\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|_{Y^*} \leq 1}} \|T^* y^*\|_{X^*} \\
&= \sup_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|_{Y^*} \leq 1}} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} |\langle T^* y^*, x\rangle| \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \sup_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|_{Y^*} \leq 1}} |\langle y^*, Tx\rangle| \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y = \|T\|_{\mathrm{op}}.
\end{aligned}$$

□

Corollario 4.2.6: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ due spazi normati e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Se T è un omeomorfismo lineare allora lo è anche T^*.*

Dimostrazione. Basta notare che $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ e la tesi segue dalla Proposizione precedente.

□

Osservazione 4.2.7 (Aggiunto per operatori su uno spazio di Hilbert): Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathrm{L}(H)$. Sia $T^* \in \mathrm{L}(H^*)$ l'aggiunto di T, allora presi $x \in H$ e $\phi \in H^*$ si ha

$$\langle \phi, Tx\rangle = \langle T^* \phi, x\rangle.$$

Ora per ogni $\psi \in H^*$ sia $v_\psi \in H$ che rappresenta ψ secondo il Teorema 2.4.2 di Riesz. Allora si ha l'esistenza di un operatore lineare $T' : H \to H$ t.c. $T'(v_\phi) = v_{T^*\phi}$ e grazie al fatto che la corrispondenza tra H ed H^*, data dal Teorema 2.4.2 di Riesz, è in realtà un'isometria si ottiene che $T' \in \mathrm{L}(H)$. Osserviamo che per ogni $v_\phi, v_\psi \in H$ si ha

$$(Tv_\phi \cdot v_\psi) = \langle \psi, Tv_\phi\rangle = \langle T^*\psi, v_\phi\rangle = (v_\phi \cdot v_{T^*\psi}) = (v_\phi \cdot T'v_\psi).$$

Nel seguito chiameremo impropriamente l'applicazione $T' \in \mathrm{L}(H)$ *aggiunto* di T ed useremo la notazione T^* per indicarlo (fregandocene dell'ambiguità tanto T' e T^* sono essenzialmente la stessa cosa per $T \in \mathrm{L}(H)$).

Definizione 4.2.8: Sia $(X, \|.\|)$ uno spazio normato ed $Y \subset X$ un suo sottospazio lineare chiuso. Definiamo l'*annullatore* di Y come

$$Y^\perp = \{f \in X^* \mid \langle f, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in Y\} = \{f \in X^* \mid Y \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Osservazione 4.2.9: L'annullatore $Y^\perp$ di un sottospazio lineare chiuso Y di uno spazio di Banach X è sempre un sottospazio lineare chiuso di X^*.

Infatti per ogni $y \in Y$ si ha che $\{y\}^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y\rangle = 0\}$ è chiuso in X^* (le mappe di valutazione su X^* sono continue rispetto alla norma duale) e vale

$$Y^\perp = \bigcap_{y \in Y} \{y\}^\perp.$$

Proposizione 4.2.10: *Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato ed $Y \subset X$ un suo sottospazio lineare chiuso. Allora Y^* è linearmente isometrico a $X^*/Y^\perp$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'inclusione $j : Y \hookrightarrow X$ e il suo aggiunto $j^* : X^* \to Y^*$. Osserviamo che $\mathrm{Ker}(j^*) = Y^\perp$, dunque c'è una mappa lineare sul quoziente $\psi : X^*/Y^\perp \to Y^*$ iniettiva indotta da j^*. Ma $j^*(f) = f \circ j = f_{|Y}$ $\forall f \in X^*$, dunque in realtà j^* non è altro che la mappa restrizione. Di conseguenza, grazie al Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach, possiamo affermare che j^* è anche surgettiva da cui segue anche la surgettività di ψ. Quindi ψ è bigettiva e continua. Manca solo da mostrare ψ è un'isometria. Sia $f \in X^*$ e $f + Y^\perp$ la sua classe al quoziente, allora per il Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach si ha

$$\|f + Y^\perp\|_{X^*/Y^\perp} = \inf_{g \in Y^\perp} \|f + g\|_{X^*} = \|f_{|Y}\|_{Y^*} = \|\psi(f + Y^\perp)\|_{Y^*}.$$

□

Proposizione 4.2.11: *Siano $(X, \|.\|)$ uno spazio normato ed $Y \subset X$ un suo sottospazio lineare chiuso. Allora $Y^\perp$ è linearmente isometrico a $(X/Y)^*$.*

Dimostrazione. Consideriamo la proiezione al quoziente $\pi : X \to X/Y$ e dualizziamo

$$\pi^* : (X/Y)^* \to X^*$$

questa risulta essere isometrica, infatti

$$\|\pi^* f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} |\langle \pi^* f, x\rangle| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} |\langle f, \pi x\rangle| = \sup_{\substack{x+Y \in X/Y \\ \|x+Y\|_{X/Y} \le 1}} |\langle f, x+Y\rangle| = \|f\|_{(X/Y)^*} \ \forall f \in (X/Y)^*.$$

Inoltre vale $\mathrm{Ran}(\pi^*) = Y^\perp$, infatti $g \in Y^\perp$ se e solo se $Y \subset \mathrm{Ker}(g)$ se e solo se $g = f \circ \pi = \pi^* f$ per un qualche $f \in (X/Y)^*$. □

4.3 Forme Geometriche del Teorema

Lemma 4.3.1: *Sia X uno SVT su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, allora ogni funzionale lineare $f : X \to \mathbb{K}$ non costante è aperto.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Essendo f non costante esiste $z \in X$ t.c. $\langle f, z\rangle \neq 0$, in particolare esiste un $\tilde{x} \in X$ t.c. $\langle f, \tilde{x}\rangle = 1$. Ora consideriamo V aperto di X e $y \in f(V)$. Sia $x \in X$ t.c. $\langle f, x\rangle = y$. Per continuità delle operazioni esiste un $\delta > 0$ t.c. per ogni $t \in \mathbb{K}$ con $|t| < \delta$ vale $x + t\tilde{x} \in V$ e quindi

$$y + t = \langle f, x + t\tilde{x}\rangle \in f(V).$$

Quindi $B_{\mathbb{K}}(y, \delta) \subset f(V)$ e $f(V)$ è aperto. □

Definizione 4.3.2: Sia X uno SVT su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Anche in questo caso è ben definito lo *spazio duale* di X come

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineare e continuo}\}.$$

Teorema 4.3.3 (di Hahn-Banach, prima forma geometrica): *Siano X uno SVT su $\mathbb{R}$, $A \subset X$ aperto convesso non vuoto e $B \subset X$ convesso non vuoto con $A \cap B = \emptyset$. Allora $\exists F \in X^*$ ed $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ vale*

$$\langle F, a\rangle < \alpha \leq \langle F, b\rangle.$$

Dimostrazione. Sia $C = A - B + x_0$ con $x_0 \in B - A$, allora C è aperto (perché $C = \bigcup_{b\in B}(A - b + x_0)$ che è unione di aperti) e convesso, infatti $\forall t \in [0,1]$ si ha

$$tC + (1-t)C \subset [tA + (1-t)A] - [tB + (1-t)B] + x_0 \subset A - B + x_0 = C.$$

ed inoltre $0 \in C$ e $x_0 \notin C$ (perché $x_0 \in C \iff \exists a \in A\ \ \exists b \in B$ t.c. $x_0 = a - b + x_0 \iff \exists a \in A\ \ \exists b \in B$ t.c. $a = b$ e questo non può avvenire per ipotesi). Prendiamo p_C il funzionale di Minkowski di C, dal fatto che $x_0 \notin C$ si ha $p_C(x_0) \geq 1$. Per il Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach (estendendo il funzionale $f : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ t.c. $f(tx_0) = t \leq |t|p_C(x_0) = p_C(tx_0)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$) esiste $F : X \to \mathbb{R}$ lineare t.c.

$$\langle F, x_0\rangle = 1 \leq p(x_0)$$

e t.c. $F \leq p$ su tutto X. Allora per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha

$$\langle F, a\rangle - \langle F, b\rangle = \langle F, a - b + x_0\rangle - \langle F, x_0\rangle \leq p_C(a - b + x_0) - 1 \leq 0$$

in quanto $a + b - x_0 \in C$, dunque $p_C(a + b - x_0) \leq 1$. Dunque

$$\langle F, a\rangle \leq \sup_A F \leq \langle F, b\rangle\ \ \forall b \in B$$

inoltre ogni funzionale lineare (continuo o no) è aperto per il Lemma 4.3.1, quindi F non ha massimo su A dunque se $\alpha = \sup_A F$, per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha

$$\langle F, a\rangle < \alpha \leq \langle F, b\rangle.$$

La continuità di F segue dal fatto che limitato sull'aperto A, quindi si applica la Proposizione 3.3.2. □

Teorema 4.3.4 (di Hahn-Banach, seconda forma geometrica): *Siano X uno SVTLC su $\mathbb{R}$, $K \subset X$ un convesso compatto non vuoto e C un convesso chiuso non vuoto con $K \cap C = \emptyset$. Allora $\exists F \in X^*$ t.c.*

$$\max_K F < \inf_C F.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.1.14 esiste un intorno di $0 \in X$ t.c. $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$ e per locale convessità posso prendere V convesso, inoltre a meno di prendere la sua parte interna posso considerarlo aperto. Dunque si applica il Teorema 4.3.3 agli aperti $A = K + V = \bigcup_{x\in K} x + V$ e $B = C + V = \bigcup_{y\in C} y + V$, ottenendo l'esistenza di un $F \in X^*$ t.c.

$$\langle F, x\rangle < \inf_C F\ \ \forall x \in K$$

e per continuità di F sul compatto K, segue $\max_K F < \inf_C F$. □

Osservazione 4.3.5: I Teoremi precedenti valgono anche nel caso di X SVT/SVTLC su $\mathbb{C}$. Infatti posso vederlo come spazio vettoriale reale, applicare il teorema in questione per trovare un funzionale lineare continuo $f : X \to \mathbb{R}$, ma vedendo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ho che f anche visto a valori in $\mathbb{C}$ rimane un funzionale lineare continuo per il quale vale la tesi.

Corollario 4.3.6: *Sia X SVTLC su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Siano $Z \subset X$ sottospazio lineare e $x_0 \notin \overline{Z}$. Allora esiste un $F \in X^*$ t.c. $\langle F, x_0 \rangle \neq 0$ e $F_{|Z} = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.3.4 esiste un funzionale $F \in X^*$ a valori reali t.c.

$$\langle F, x \rangle < \langle F, x_0 \rangle \ \ \forall x \in Z$$

ma per $x \in Z$, essendo Z sottospazio lineare, vale $\lambda x \in Z \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, dunque

$$\lambda \langle F, x \rangle < \langle F, x_0 \rangle \ \ \forall x \in Z \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

da cui segue $\langle F, x \rangle = 0 \ \ \forall x \in Z$. □

4.4 Convessità e Punti Estremali

Definizione 4.4.1: Siano X uno spazio vettoriale reale ed $S \subset X$. Un punto $p \in S$ è un *punto estremale* di S se $\forall s_0, s_1 \in S \ \ \forall t \in (0, 1)$ l'uguaglianza $ts_0 + (1 - t)s_1 = p$ implica $s_0 = s_1 = p$. Denotiamo l'insieme dei punti estremali di S con $\mathrm{ext}(S)$.

Osservazione 4.4.2: Sia $S \subset \mathbb{R}$. Allora $p \in \mathrm{ext}(S)$ se e solo se $p \in \{\max S, \min S\}$ quando esistono.

Osservazione 4.4.3: Nel contesto della definizione precedente, in generale p è estremale di S se e solo se per ogni retta affine r passante per p si ha che p è estremale di $r \cap S$.

Osservazione 4.4.4: Sia X spazio vettoriale reale. Se $S \subset X$ è convesso, vale che $p \in S$ è punto estremale di S se e solo se

$$\forall s_0, s_1 \in S \ \ p = \frac{1}{2}(s_0 + s_1) \Rightarrow s_0 = s_1 = p.$$

Osservazione 4.4.5: Sia X uno spazio vettoriale reale. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è convessa e non costante su un $S \subset X$, allora ogni punto di massimo di $f_{|S}$ è punto estremale di S.

Esempio 4.4.6: (1) In un poliedro di $\mathbb{R}^2$ i punti estremali sono i vertici;

(2) dato H spazio di Hilbert, i punti estremali di $\{T \in \mathrm{L}(H, H) \mid T = T^* \geq 0\}$ sono i proiettori ortogonali;

(3) i punti estremali dello spazio delle misure di probabilità su un dato spazio misurabile $(X, \mathscr{B})$, con X spazio metrico compatto, $M_1(X, \mathscr{B})$, sono le misure di Dirac $\{\delta_x\}_{x \in X}$;

(4) i punti estremali di $\{\mu \in M_1(X, \mathscr{B}) \mid \mu$ è T-invariante$\}$, in cui $T : X \to X$ è misurabile, sono le misure di probabilità ergodiche rispetto a T.

Definizione 4.4.7: Siano X uno spazio vettoriale reale ed $S \subset X$. Definiamo l'*inviluppo convesso* di S come il più piccolo sottoinsieme convesso di X che contiene S e lo denoteremo con $\mathrm{co}(S)$. Inoltre chiameremo la chiusura dell'inviluppo convesso di S *inviluppo convesso chiuso* di S e lo denoteremo con $\overline{\mathrm{co}}(S)$.

Osservazione 4.4.8: Nel contesto della definizione precedente, essendo intersezione di convessi sempre convessa vale

$$\mathrm{co}(S) = \bigcap_{\substack{C \subset X \text{ convesso} \\ S \subset C}} C.$$

Definizione 4.4.9: Siano X uno spazio vettoriale reale ed $S \subset X$ non vuoti. Un insieme $A \subset S$ non vuoto è detto *insieme estremale* di S se $\forall s_0, s_1 \in S$ $\forall t \in (0, 1)$ l'avverarsi di $ts_1 + (1-t)s_0 \in A$ implica $s_0, s_1 \in A$.

Osservazione 4.4.10: Nel contesto della definizione precedente.

(1) p è punto estremale di S se e solo se $\{p\}$ è insieme estremale di S;

(2) $A \subset S$ è insieme estemale di S se e solo se per ogni retta affine r che incontra A vale che $r \cap A \subset r \cap S$ è insieme estremale di $r \cap S$;

(3) Se $A \subset S \subset \mathbb{R}$ allora A è insieme estremale di S se e solo se A è uno dei seguenti insiemi $S, \{\max S\}, \{\min S\}, \{\max S, \min S\}$, quando esistono.

Proposizione 4.4.11: *Sia X uno spazio vettoriale reale. Valgono i seguenti fatti:*

(1) se $A \subset B \subset C \subset X$ e A è insieme estremale di B che a sua volta è insieme estremale di C, allora A è insieme estremale di C;

(2) se $\{A_i\}_{i\in I}$ sono sottoinsiemi di X, $B \subset X$ e $A_i \subset B$ è insieme estremale di B per ogni $i \in I$, allora $\bigcap_{i\in I} A_i$, quando è non vuoto, è ancora insieme estremale di B;

(3) se $f : X \to \mathbb{R}$ è convessa che ha massimo in $S \subset X$ allora i punti di massimo di f formano un insieme estremale di S.

Teorema 4.4.12 (di Krein-Milman): *Siano X SVTLC T0 reale e $S \subset X$ compatto non vuoto. Allora*

(1) $\mathrm{ext}(S) \neq \emptyset$*;*

(2) $S \subset \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(S))$.

In particolare se S è anche convesso vale $S = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(S))$.

Dimostrazione. Passo 1: *Dimostriamo l'esistenza di un punto estremale in S.*

Sia $\mathcal{A} = \{A \subset S \mid A \text{ chiuso}, A \text{ è insieme estremale di } S\}$, allora $S \in \mathcal{A} \neq \emptyset$ e, per la Proposizione 4.4.11 (2), ogni sua sottocatena ammette un minorante, dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento minimale $B \in \mathcal{A}$. Proviamo che $B = \{p\}$ per un qualche punto $p \in S$, in quanto, in tal caso, si avrebbe $p \in \mathrm{ext}(S)$. Supponiamo per assurdo che B abbia almeno due elementi e prendiamo $a, b \in B$ con $a \neq b$. Per il Teorema 4.3.4 esiste un $f \in X^*$ t.c.

$$\langle f, a\rangle > \langle f, b\rangle$$

(stiamo usando che uno SVT è T0 se e solo se è T1). Allora, essendo B chiuso, vale

$$B_0 = \{x \in B \mid \langle f, x \rangle = \max_B f\} \neq \emptyset$$

ed è chiuso in S (f è continua), dunque è compatto (chiuso in S che è compatto) e per quanto detto nella Proposizione 4.4.11 (3) si ha che B_0 è insieme estremale di B. Di conseguenza B è insieme estremale anche di S, ma $b \notin B_0$, dunque $B_0 \subsetneq B$ e questo è un assurdo perché B doveva essere minimale.

Passo 2: *Dimostriamo che* $S \subset \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(S))$.

Per assurdo sia $a \in S \setminus \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(S))$. Per il Teorema 4.3.4 esiste $f \in X^*$ t.c.

$$\langle f, a \rangle > \langle f, x \rangle \ \ \forall x \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(S))$$

Consideriamo

$$S_0 = \{x \in S \mid \langle f, x \rangle = \max_S f\}$$

che è compatto, convesso e non vuoto. Per il passo precedente S_0 ha un punto estremale $p \in S_0 \subset S$, allora p è punto estremale anche di S (perché S_0 è insieme estremale di S per la Proposizione 4.4.11 (3), quindi p è estremale in S sempre per la Proposizione 4.4.11 (1)) e quindi

$$\langle f, a \rangle > \langle f, p \rangle$$

ma $a \in S$, dunque $p \notin S_0$ che è un assurdo. □

Teorema 4.4.13 (di Choquet): *Siano X SVTLC T0 N1, $C \subset X$ convesso, compatto e non vuoto, $c \in C$ e $\mathscr{B}_C$ una σ-algebra di parti di C. Allora esiste una misura di probabilità μ sullo spazio misurabile $(C, \mathscr{B}_C)$ t.c. $\mu(\mathrm{ext}(C)) = 1$ e*

$$c = \int_C x \, d\mu(x)$$

(in cui l'integrale è inteso nel senso di Bochner; c va pensato come il "baricentro" di C rispetto alla misura μ).

Dimostrazione. Non trattata. □

5

Topologia per l'Analisi Funzionale, prima parte

5.1 Topologie Iniziali

Proposizione 5.1.1: *Siano X un insieme, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $\mathscr{G} = \{g_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni. Allora esiste la topologia meno fine $\tau_{\mathscr{G}}$ su X che rende continue tutte le funzioni di $\mathscr{G}$.*

Dimostrazione. Sia $i \in I$, affinché g_i sia continua τ deve contenere ogni insieme della forma $g_i^{-1}(A)$ con $A \in \tau_i$. Dunque dovrà contenere anche ogni intersezione finita di insiemi di questo tipo, cioè dovrà essere

$$g_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap g_{i_r}^{-1}(A_{i_r}) \in \tau \ \ \forall A_{i_1} \in \tau_{i_1}, \dots, \ \ \forall A_{i_r} \in \tau_{i_r}, \ \ \forall \{i_1, \dots, i_r\} \subset I.$$

Inoltre se chiamo $\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$ tale famiglia di intersezioni finite si nota facilmente che è base di una topologia su X e tale topologia rende le g_i continue ed è la più piccola possibile per costruzione. □

Definizione 5.1.2: Siano X un insieme, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $\mathscr{G} = \{g_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni. Chiamiamo *topologia iniziale* su X associata alla famiglia $\mathscr{G}$ la topologia meno fine su X che rende continue tutte le funzioni di $\mathscr{G}$ e la denotiamo con $\tau_{\mathscr{G}}$.

Fissiamo adesso X un insieme, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $\mathscr{G} = \{g_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni..

Proposizione 5.1.3: *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Allora $x_n \to x \in X$ in $\tau_{\mathscr{G}}$ se e solo se $g_i(x_n) \to g_i(x)$ $\forall i \in I$.*

Dimostrazione. Se $x_n \to x$ in $\tau_{\mathscr{G}}$, allora $g_i(x_n) \to g_i(x)$ $\forall i \in I$ per continuità delle g_i. Per il viceversa consideriamo un intorno U di x per la topologia $\tau_{\mathscr{G}}$, allora questo conterrà un aperto di base della forma $V = \bigcap_{j\in J} g_j^{-1}(A_j) \in \mathscr{B}_{\mathscr{G}}$ e per ogni $j \in J$ (che è finito) esiste un $N_j \in \mathbb{N}$ t.c. $g_j(x_n) \in A_j$ $\forall n \geq N_j$, da cui $x_n \in g_j^{-1}(A_j)$ $\forall n \geq N_j$. Dunque $x_n \in V \subset U$ $\forall n \geq \max_{i\in J} N_j$. □

Teorema 5.1.4 (Proprietà universale della topologia iniziale): *La topologia $\tau_{\mathscr{G}}$ su X è l'unica che rende le funzioni di $\mathscr{G}$ continue e che presi comunque Y spazio topologico ed $f : Y \to X$*

funzione, vale che f è continua rispetto alla topologia $\tau_{\mathscr{G}}$ su X se e solo se $g_i \circ f : Y \to X_i$ è continua per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. Per definizione $\tau_{\mathscr{G}}$ rende le funzioni di $\mathscr{G}$ continue. Se f è continua allora per composizione di continue anche ogni $g_i \circ f$ lo è. Viceversa supponiamo che $g_i \circ f$ sia continua per ogni $i \in I$. Sia $U \in \tau_{\mathscr{G}}$, allora sarà $U = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} g_i^{-1}(A_i)$ e quindi

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} f^{-1}(g_i^{-1}(A_i)) = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} (g_i \circ f)^{-1}(A_i)$$

che è aperto per le ipotesi. Dunque effettivamente $\tau_{\mathscr{G}}$ gode della proprietà dell'enunciato.

Sia adesso τ' una qualsiasi altra topologia su X che gode della proprietà dell'enunciato. Scegliendo $f_1 = Id_X : (X, \tau') \to (X, \tau_{\mathscr{G}})$ si ha $g_i \circ f_1 = g_i : (X, \tau') \to X_i$ che è continua, dunque anche f_1 è continua, ossia $\tau_{\mathscr{G}} \subset \tau'$. Prendendo $f_2 = Id_X : (X, \tau_{\mathscr{G}}) \to (X, \tau')$ e facendo gli stessi passaggi si ottiene anche l'altra inclusione. □

Esempio 5.1.5: L'usuale topologia prodotto sul prodotto cartesiano di spazi topologici è la topologia iniziale associata alle proiezioni.

Esempio 5.1.6: L'usuale topologia di sottospazio di un sottoinsieme di uno spazio topologico è la topologia iniziale associata all'inclusione.

Teorema 5.1.7 (di transitività): *Siano $X, \{X_i\}_{i \in I}$ insiemi, $\{(X_{i,j}, \tau_{i,j})\}_{\substack{j \in J_i \\ i \in I}}$ spazi topologici, $\mathscr{G} = \{g_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ famiglia di funzioni e $\mathscr{F}_i = \{f_{i,j} : X_i \to X_{i,j}\}_{j \in J_i}$ famiglia di funzioni per ogni $i \in I$. Consideriamo*

$$\mathscr{F} = \{f_{i,j} \circ g_i : X \to X_{i,j}\}_{\substack{j \in J_i \\ i \in I}}.$$

Allora la topologia iniziale $\tau_{\mathscr{F}}$ indotta su X da $\mathscr{F}$ e la topologia iniziale $\widetilde{\tau_{\mathscr{G}}}$ indotta su X da $\mathscr{G}$, in cui si considera su ogni X_i la topologia iniziale $\tau_{\mathscr{F}_i}$, sono in realtà la stessa.

Dimostrazione. Usiamo la proprietà universale (Teorema 5.1.4). Sia Y uno spazio topologico e $f : Y \to X$ una funzione. Allora f è continua per la topologia $\tau_{\mathscr{F}}$ se e solo se $f_{i,j} \circ g_i \circ f$ è continua per ogni $j \in J_i$ e per ogni $i \in I$, mentre è continua per la topologia $\widetilde{\tau_{\mathscr{G}}}$ se $g_i \circ f$ è continua per ogni $i \in I$. Ma per ogni $i \in I$ vale $g_i \circ f$ continua se e solo se $f_{i,j} \circ g_i \circ f$ è continua per ogni $j \in J_i$, dunque in realtà le due condizioni di continuità sono la stessa, da cui la tesi. □

In tutto il resto della sezione sarà $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 5.1.8 (Topologie iniziali e SVT): *Siano X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di SVT(LC) su $\mathbb{K}$ e $\mathscr{G} = \{g_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di applicazioni lineari. Allora la topologia iniziale $\tau_{\mathscr{G}}$ su X lo rende SVT(LC).*

Dimostrazione. Infatti per la somma vale $g_i \circ + = +_i \circ (g_i, g_i)$, in cui $+_i$ è la somma in X_i, e il RHS è continua perché composizione di continue, dunque per la proprietà universale $+$ è continua. Similmente si fa per il prodotto per scalari. Se inoltre ogni X_i è SVTLC, prese $\mathscr{B}_i$ basi locali di intorni aperti convessi, allora

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{j \in J} g_j^{-1}(U_j) \mid J \subset I \text{ finito}, \;\; U_j \in \mathscr{B}_j \;\; \forall j \in J \right\}$$

è una base locale di aperti convessi di X con $\tau_{\mathscr{G}}$. □

Definizione 5.1.9: Siano X uno spazio vettoriale e $\mathscr{G} = F \subset X'$. Allora in un questo contesto indicheremo useremo la notazione $\sigma(X, F)$ (al posto di τ_F) per indicare la topologia iniziale su X indotta dalla famiglia di funzioni F.

Proposizione 5.1.10: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ed $F \subset X'$ un sottospazio lineare. Allora $(X, \sigma(X, F))$ è uno SVTLC. Inoltre tale topologia non è mai normabile, ossia non è mai indotta da una norma su X, se* $\dim X = +\infty$.

Dimostrazione. Per quanto detto nell'Osservazione **??**, la topologia $\sigma(X, F)$ è esattamente la topologia indotta dalla famiglia di seminorme $\mathcal{P} = \{|\langle f, .\rangle|\}_{f\in F}$. Ma allora si ha che una base locale di intorni aperti di $\sigma(X, F) = \tau_{\mathcal{P}}$ è data da

$$\mathscr{B} = \{U(\mathsf{f})\}_{\substack{\mathsf{f}\subset F \\ \mathsf{f}\ \text{finito}}}$$

in cui

$$U(\mathsf{f}) = \{x \in X \mid |\langle f, x\rangle| < 1 \ \ \forall f \in \mathsf{f}\} \ \ \forall \mathsf{f} \subset F \text{ finito.}$$

Osserviamo che

$$U(\mathsf{f}) \supset \bigcap_{f\in\mathsf{f}} \mathrm{Ker} f \ \ \forall \mathsf{f} \subset F \text{ finito}$$

ed il nucleo di un funzionale lineare ha sempre codimensione 1, dunque l'intersezione dei nuclei di $m \in \mathbb{N}$ funzionali lineari ha codimensione al più m, in particolare finita, dunque se $\dim X = +\infty$ il sottospazio lineare $U(\mathsf{f})$ ha sempre dimensione infinita per $\mathsf{f} \subset F$ finito. Dunque ogni intorno dell'origine di X nella topologia $\sigma(X, F)$ ha sempre al suo interno un sottospazio lineare di dimensione infinita quando $\dim X = +\infty$ e questo ci dice che tale topologia non può essere normabile perché se lo fosse le palle sarebbero una base di tale topologia e queste non contengono mai nemmeno una retta (almeno per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). ◻

Osservazione 5.1.11: Nella dimostrazione della proposizione precedente si è in particolare dimostrato che in uno spazio del tipo $(X, \sigma(X, F))$, con X spazio vettoriale e $F \subset X'$ sottospazio lineare, la topologia è sempre indotta dalla famiglia di seminorme $\mathcal{P} = \{|\langle f, .\rangle|\}_{f\in F}$.

Lemma 5.1.12: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f_1, ..., f_n, f \in X'$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \ ;$$

(2) esiste $\gamma \in (0, +\infty)$ t.c.

$$|\langle f, x\rangle| \leq \gamma \max_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x\rangle| \ ;$$

(3) $\mathrm{Ker}(f) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i)$.

Dimostrazione. Ovvie sono le implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) e (2) $\Rightarrow$ (3). Dimostriamo (3) $\Rightarrow$ (1). Sia $\pi : X \to \mathbb{K}^n$ t.c.

$$\pi(x) = (\langle f_i, x\rangle)_{i=1,...,n} \ \ \forall x \in X.$$

Se $\pi(x) = \pi(x')$ allora $x - x' \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i)$ e, grazie a (3), otteniamo $\langle f, x\rangle = \langle f, x'\rangle$. Dunque è ben definito il funzionale lineare $\Lambda : \pi(X) \to \mathbb{K}$ t.c.

$$\langle \Lambda, \pi(x)\rangle = \langle f, x\rangle \ \ \forall x \in X.$$

Estendiamo Λ ad un funzionale lineare $\widetilde{\Lambda}$ su tutto $\mathbb{K}^n \supset \pi(X)$ (ad esempio ponendolo uguale a 0 fuori da $\pi(X)$). In particolare quindi esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ che rappresentano $\widetilde{\Lambda}$, ossia t.c.

$$\langle \widetilde{\Lambda}, (u_1, ..., u_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \ \ \forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Dunque

$$\langle f, x \rangle = \langle \widetilde{\Lambda}, \pi(x) \rangle = \langle \widetilde{\Lambda}, (\langle f_1, x \rangle, ..., \langle f_n, x \rangle) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f_i, x \rangle \ \ \forall x \in X$$

che è (1). □

Teorema 5.1.13: *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ed $F \subset X'$ un sottospazio lineare. Allora lo spazio duale di $(X, \sigma(X, F))$ coincide con F.*

Dimostrazione. Per definizione di $\sigma(X, F)$ ogni $g \in F$ è continuo rispetto a $\sigma(X, F)$. Viceversa supponiamo che g sia continuo rispetto a $\sigma(X, F)$, allora è in particolare continuo in $0 \in X$ e di conseguenza esiste un aperto di base locale $U(\mathrm{f})$, con $\mathrm{f} \subset F$ finito, t.c.

$$|\langle g, x \rangle| < 1 \ \ \forall x \in U(\mathrm{f}).$$

Dimostriamo ora che $\mathrm{Ker}(g) \supset \bigcap_{f \in \mathrm{f}} \mathrm{Ker}(f)$. Se ci fosse un $x \in (\bigcap_{f \in \mathrm{f}} \mathrm{Ker}(f)) \setminus \mathrm{Ker}(g)$ allora tutto $\mathrm{span}(x) \subset \bigcap_{f \in \mathrm{f}} \mathrm{Ker}(f) \subset U(\mathrm{f})$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si ha

$$n|\langle g, x \rangle| = |\langle g, nx \rangle| < 1$$

ossia

$$|\langle g, x \rangle| < \frac{1}{n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$$

e quindi mandando $n \to +\infty$ si ottiene $x \in \mathrm{Ker}(g)$, che è un assurdo. Di conseguenza vale la condizione (3) del Lemma 5.1.12, che però è equivalente alla condizione (1) dello stesso lemma, dunque $g \in F$. □

Proposizione 5.1.14: *Sia X uno spazio vettoriale e $F \subset X'$ un sottospazio lineare. Allora $S \subset X$ è limitato in $(X, \sigma(X, F))$ se e solo se*

$$\sup_{x \in S} |\langle f, x \rangle| < +\infty \ \ \forall f \in F.$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 3.4.10 e dall'Osservazione 5.1.11. □

Proposizione 5.1.15: *Siano X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $F \subset X'$ un sottospazio lineare. La topologia $\sigma(X, F)$ su X è N1 se e solo se* $\dim F \leq \aleph_0$.

Dimostrazione. Se $F = \mathrm{span}(\{f_k\}_{k \in J})$ con $|J| \leq \aleph_0$, allora la topologia $\sigma(X, F)$ è la meno fine topologia che rende continua le funzioni $\{f_k\}_{k \in J}$ ed è quindi indotta dalla famiglia di seminorme $\mathcal{P} = \{|\langle f_k, . \rangle|\}_{k \in J}$ (come mostrato nella Proposizione 5.1.10) ed ha base locale numerabile di intorni aperti $\mathscr{B} = \{V(f_j, n)\}_{j \in J, \ n \in \mathbb{N}_+}$ con

$$V(f_j, n) = \{x \in X \mid |\langle f_j, x \rangle| < n^{-1}\}.$$

Viceversa se esiste una base locale numerabile di intorni, posso prenderla senza perdita di generalità fatta di insiemi del tipo

$$U(f_1, ..., f_m) = \{x \in X \mid |\langle f_i, x \rangle| < 1 \ \ \forall i = 1, ..., m\}$$

con $m \in \mathbb{N}$ (infatti per quanto visto nella Proposizione 5.1.10 gli insiemi di questo tipo formano a loro volta una base locale di aperti), ossia posso considerare la base locale numerabile della forma $\mathscr{B}_0 = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$U_n = \{x \in X \mid |\langle f_{n,i}, x\rangle| < 1 \ \ \forall i = 1, ..., k_n\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

in cui $k_n \in \mathbb{N}_+ \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi, per continuità di f, esisterà un $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle f, x\rangle| < 1 \ \ \forall x \in U_n$$

ed effettuando un ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione del Teorema 5.1.13 si ottiene che f verifica la proprietà (3) del Lemma 5.1.12 con le funzioni $\{f_{n,i}\}_{i=1,...,k_n}$ relative ad U_n e quindi sarà combinazione lineare delle funzioni $\{f_{n,i}\}_{i=1,...,k_n}$. Quindi $\{f_{n,i}\}_{\substack{i=1,...,k_n\\ n\in\mathbb{N}}}$, che è al più numerabile, genera F e da questo se ne deduce che una base di F avrà necessariamente cardinalità al più numerabile. □

5.2 Topologia Debole e Debole*

Nel resto della sezione sarà sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definizione 5.2.1 (Topologia debole): Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$ ed X^* il suo spazio duale. La topologia $\sigma(X, X^*)$ è chiamata *topologia debole* di X.

Osservazione 5.2.2: Nel contesto della definizione precedente, talvolta chiameremo *topologia forte* la topologia originaria di X.

Osservazione 5.2.3: Nel contesto della definizione precedente, la topologia debole mantiene continui i funzionali di X^* ed è la topologia meno fine che lo fa, dunque se τ è la topologia forte di X, vale $\sigma(X, X^*) \subset \tau$.

Definizione 5.2.4 (Topologia debole*): Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$ ed X^* il suo spazio duale. La topologia $\sigma(X^*, X)$, in cui si è identificato X con le valutazioni (con l'immersione canonica $X \overset{\Phi}{\hookrightarrow} X^{**}$), è chiamata *topologia debole** di X^*.

Osservazione 5.2.5: Siano X SVT su $\mathbb{K}$ e X^* il suo duale. Ovviamente $X^* \subset \mathbb{K}^X$, consideriamo su $\mathbb{K}^X$ l'usuale topologia prodotto, ossia la topologia iniziale associata alle proiezioni di $\mathbb{K}^X$. Osserviamo che le proiezioni di $\mathbb{K}^X$ non sono altro che le valutazioni, dunque per il Teorema 5.1.7 di transitività, la topologia debole* su X^* coincide con la topologia da sottospazio di X^* ereditata da $\mathbb{K}^X$ (ricordiamo che la topologia da sottospazio è la topologia iniziale associata all'inclusione).

Osservazione 5.2.6: Nel caso in cui X è spazio normato, su X^* è ben definita la topologia data dalla norma operatoriale τ_{op}. Per tale topologia le valutazioni su X^* sono continue, dunque $\sigma(X^*, X) \subset \tau_{\text{op}}$.

Osservazione 5.2.7: Consideriamo le famiglie di funzioni $\{\Phi_X\}$ e X^* e notiamo che, se per ogni $f \in X^*$ è $\text{ev}_f : X^{**} \to \mathbb{K}$ t.c.

$$\langle \text{ev}_f, \varphi\rangle = \langle \varphi, f\rangle \ \ \forall \varphi \in X^{**},$$

si ha

$$\langle \mathrm{ev}_f \circ \Phi_X, x\rangle = \langle \mathrm{ev}_f, \Phi_X(x)\rangle = \langle \Phi_X(x), f\rangle = \langle f, x\rangle$$

ossia $\mathrm{ev}_f \circ \Phi_X = f$ per ogni $f \in X^*$. Quindi per il Teorema 5.1.7 di transitività si ha che $\sigma(X, X^*)$ è esattamente la topologia iniziale su X indotta da $\Phi_X : X \to \Phi_X(X) \subset X^{**}$ in cui su $\Phi_X(X)$ c'è la topologia $\sigma(X^{**}, X^*)_{|\Phi_X(X)}$ e Φ_X diventa un omeomorfismo lineare tra questi spazi (facile verifica controllando che $\Phi_X : (X, \sigma(X, X^*)) \to (\Phi_X(X), \sigma(X^{**}, X^*)_{|\Phi_X(X)})$ è bigettiva, continua e aperta).

Osservazione 5.2.8: Talvolta (soprattutto nei capitoli successivi) chiameremo gli aperti deboli di uno spazio *w-aperti*, i chiusi deboli di uno spazio *w-chiusi*, i compatti deboli di uno spazio *w-compatti*, i limitati deboli di uno spazio *w-limitati*, gli aperti deboli* di un duale *w*-aperti*, i chiusi deboli* di un duale *w*-chiusi*, i compatti deboli* di un duale *w*-compatti* e i limitati deboli* di un duale *w*-limitati*. Un funzionale di uno spazio sarà detto *w-continuo* se è continuo rispetto alla topologia debole nello spazio. Un funzionale di un duale sarà detto *w*-continuo* se è continuo rispetto alla topologia debole* sul duale. Indicheremo la chiusura nella topologia debole con $\overline{S}^w$ e la chiusura nella topologia debole* con $\overline{S}^{w*}$. Un sottoinsieme denso rispetto alla topologia debole sarà detto *w-denso*, mentre un sottoinsieme di funzionali denso rispetto alla topologia debole* sarà detto *w*-denso*. Inoltre talvolta indicheremo la topologia debole di uno spazio e la topologia debole* di un duale rispettivamente con τ_w e τ_{w*}.

Proposizione 5.2.9: *Sia X SVT, allora valgono le seguenti affermazioni:*

(1) il duale di $(X, \sigma(X, X^*))$ coincide con X^*;

(2) il duale di $(X^*, \sigma(X^*, X))$ coincide con $\Phi(X)$ (in cui $X \overset{\Phi}{\hookrightarrow} X^{**}$ è l'inclusione canonica per valutazioni).

Dimostrazione. Segue dal Teorema 5.1.13. □

Definizione 5.2.10: Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$, X^* il suo spazio duale e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Diciamo che x_n *converge debolmente ad* $x \in X$ e scriviamo

$$x_n \rightharpoonup x$$

quando $x_n \to x$ nella topologia debole $\sigma(X, X^*)$.

Definizione 5.2.11: Siano X uno SVT, X^* il suo spazio duale ed $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ una successione. Diciamo che f_n *converge debolmente* ad* $f \in X^*$ e scriviamo

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

quando $f_n \to f$ nella topologia debole* $\sigma(X^*, X)$.

Osservazione 5.2.12: Talvolta per dire che $x_n \to x$ nella topologia forte dello SVT di cui sono elementi diremo che x_n *converge fortemente ad* x.

Proposizione 5.2.13: *Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$, X^* il suo spazio duale, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione ed $x \in X$. Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) $x_n \rightharpoonup x \iff \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \;\; \forall f \in X^*$;

(2) se $x_n \to x$ nella topologia forte $\Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

Dimostrazione. (1) Segue dalla definizione di topologia debole e dalla Proposizione 5.1.3.

(2) Vale perché la topologia debole è meno fine della topologia forte.

□

Proposizione 5.2.14: *Siano X uno SVT su $\mathbb{K}$, X^* il suo spazio duale, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ una successione ed $f \in X^*$. Vale la seguente affermazione*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \ \ \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Segue dalla definizione di topologia debole* e dalla Proposizione 5.1.3. □

D'ora in poi sarà fissato $(X, \|.\|)$ spazio di Banach su $\mathbb{K}$. Inoltre chiameremo $\overline{B}_X$ e $\overline{B}_{X^*}$ la palla unitaria chiusa degli spazi normati X ed X^* rispettivamente (consideriamo su X^* l'usuale norma operatoriale).

Teorema 5.2.15: *Gli spazi "deboli" $(X, \sigma(X, X^*))$ e $(X^*, \sigma(X^*, X))$ sono entrambi SVTLC T0, in particolare sono regolari (e quindi T2).*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach (in particolare per il Corollario 4.1.5) $\{|f| \mid f \in X^*\}$ una famiglia di seminorme su X separante ed induce proprio la topologia debole su X, quindi $(X, \sigma(X, X^*))$ è uno SVTLC T0. Ovviamente anche i moduli delle valutazioni sono una famiglia separante di seminorme su X^* ed inducono proprio la topologia debole* su X^*, quindi anche $(X^*, \sigma(X^*, X))$ è uno SVTLC T0. Per concludere si usa il Corollario 3.1.17. □

Osservazione 5.2.16: Lo spazio duale X^* è denso nello spazio duale algebrico X' (visti come sottospazi di $\mathbb{K}^X$). In particolare X^* non è in generale chiuso in $\mathbb{K}^X$ (con la topologia prodotto).

Infatti prendiamo $f \in X'$. Consideriamo un generico intorno di f in $X' \subset \mathbb{K}^X$ (con la topologia di sottospazio)

$$U(x_1, ..., x_m; \varepsilon) = \{g \in X' \mid |\langle f - g, x_i\rangle| \le \varepsilon \ \ \forall i = 1, ..., m\}$$

in cui si sono fissati $x_1, ..., x_m \in X$ e $\varepsilon > 0$. Per il Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach $\exists \widetilde{f} \in X^*$ t.c. $\langle \widetilde{f}, x\rangle = \langle f, x\rangle \ \forall x \in \operatorname{span}(x_1, ..., x_m) = V$ e $\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \|f_{|V}\|_{V^*}$ (abbiamo esteso $f_{|V}$), in particolare

$$|\langle f - \widetilde{f}, x_i\rangle| = 0 \ \ \forall i = 1, ..., m$$

dunque $\widetilde{f} \in U(x_1, ..., x_m; \varepsilon)$, ossia $U(x_1, ..., x_m; \varepsilon) \cap X^* \neq \emptyset$.

Proposizione 5.2.17: *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $x \in X$ sono t.c. $x_n \rightharpoonup x$ allora vale*

$$\|x\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

Dimostrazione. Per ogni $f \in X^*$ vale

$$|\langle f, x_n\rangle \le \|f\|_{X^*}\|x_n\|$$

dunque passando al limite inferiore per $n \to +\infty$ si ottiene

$$|\langle f, x\rangle| \le \|f\|_{X^*} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$$

che prendendo l'estremo superiore per $f \in X^*$ con $\|f\| \le 1$ ci dà (grazie al Corollario 4.1.5) la tesi. □

Proposizione 5.2.18: *Se X è separabile, allora la palla $\overline{B}_{X^*}$ è sequenzialmente compatta in $(X^*, \sigma(X^*, X))$ e lo spazio $(\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X))_{|\overline{B}_{X^*}})$ è metrizzabile.*

Dimostrazione. Sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ denso in $\overline{B}_X$. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{X^*}$, allora le f_n sono tutte 1-lipschitziane, quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge puntualmente su x_k $\forall k \in \mathbb{N}$ (notiamo che i singoletti $\{x_k\}$ sono compatti ed estraendo iterativamente per ogni $k \in \mathbb{N}$ una sottosuccessione che converge in x_j per ogni $j \leq k$ ed attuiamo un argomento diagonale per estrarre una sottosuccessione che converge in ogni x_k). Essendo l'insieme di convergenza di $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ chiuso e contenente $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ segue che $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente su tutto $\overline{B}_X$ e quindi su tutto X per la linearità delle f_{n_k}. Sia f il limite puntuale di $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, questa sarà ancora lineare ed 1-lipschitziana, ossia $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge in $\sigma(X^*, X)$ ad un elemento di $\overline{B}_{X^*}$, questo prova la compattezza sequenziale.

Vediamo la metrizzabilità. Consideriamo su X^* la norma

$$\|f\|_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} 2^{-k}|\langle f, x_k\rangle| \ \ \forall f \in X^*.$$

Dico che $\|.\|_0$ induce su $\overline{B}_{X^*}$ la topologia $\sigma(X^*, X))_{|\overline{B}_{X^*}}$. La mappa

$$(\overline{B}_{X^*}, \|.\|_0) \overset{*}{\rightharpoonup} (\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X)_{|\overline{B}_{X^*}})$$

è sequenzialmente continua, infatti sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{X^*}$ convergente in norma $\|.\|_0$ ad $f \in \overline{B}_{X^*}$, questo avviene se e solo se

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_+} 2^{-k}|\langle f_n - f, x_k\rangle| \longrightarrow 0$$

che implica $|\langle f_n - f, x_k\rangle| \to 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_+$ e quindi come prima $f_n \to f$ puntualmente su tutto X, ossia $f_n \to f$ nella topologia debole*. Ma la topologia indotta da una norma è N1, dunque la mappa considerata è anche continua e quindi la topologia $\sigma(X^*, X))_{|\overline{B}_{X^*}}$ è contenuta nella topologia su $\overline{B}_{X^*}$ indotta dalla norma $\|.\|_0$. Invece

$$(\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X)_{|\overline{B}_{X^*}}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\overline{B}_{X^*}, \|.\|_0)$$

è sequenzialmente continua in quanto se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{X^*}$ vale $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \in \overline{B}_{X^*}$ se e solo se $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall x \in X$ ed in particolare per $x = x_k$, $k \in \mathbb{N}$ e quindi per il Teorema di convergenza dominata si ha

$$\|f_n - f\|_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} 2^{-k}|\langle f_n - f, x_k\rangle| \longrightarrow 0$$

infatti per ogni $k \in \mathbb{N}_+$ si ha $2^{-k}|\langle f_n - f, x_k\rangle| \leq 2^{-k+1}$ e $(2^{-k+1})_{k\in\mathbb{N}_+} \in \ell^1$. Ma allora essendo $(\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X)_{|\overline{B}_{X^*}})$ sequenzialmente compatto segue che lo è anche $(\overline{B}_{X^*}, \|.\|_0)$, ma quest'ultimo è metrico, quindi è compatto. Infine basta osservare che $(\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X)_{|\overline{B}_{X^*}})$ è T2 per concludere che la mappa $Id_{\overline{B}_{X^*}} : (\overline{B}_{X^*}, \|.\|_0) \to (\overline{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X)_{|\overline{B}_{X^*}})$ è un omeomorfismo (continua tra un compatto ed un T2) e da questo segue immediatamente la metrizzabilità voluta. □

Proposizione 5.2.19: *Sia $C \subset X$ un sottoinsieme convesso. Allora C è chiuso rispetto alla topologia forte di X (quella della norma) se e solo se C è w-chiuso in X.*

Dimostrazione. Essendo la topologia debole meno fine della topologia forte di X segue che se C è chiuso debole allora è anche chiuso nella topologia forte di X. Viceversa se C è chiuso forte, preso un $x \notin C$, per il Teorema 4.3.4 di Hahn-Banach, seconda forma geometrica, segue che esiste un $F \in X^*$ ed un $\gamma > 0$ t.c. $x \in U = \{F < \gamma\}$ e $C \cap U = \emptyset$, inoltre U è aperto nella topologia debole di X, dunque U è un intorno debole di x tutto contenuto in C^c che è quindi aperto debole. □

Corollario 5.2.20: *Lo spazio* $(X, \|.\|)$ *è separabile se e solo se lo è lo spazio* $(X, \sigma(X, X^*))$.

Dimostrazione. Ovviamente se $(X, \sigma(X, X^*))$ è separabile allora lo è anche $(X, \|.\|)$. Viceversa sia $D \subset X$ numerabile w-denso, consideriamo $\overline{\operatorname{span}}(D)$ che è convesso e chiuso in $(X, \|.\|)$, in particolare è chiuso anche in $(X, \sigma(X, X^*))$, quindi contiene la chiusura debole di D che è tutto X, quindi $\overline{\operatorname{span}}(D) = X$. Ma $\overline{\operatorname{span}}(D) = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}}(D)$, per la continuità delle operazioni, quindi $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}}(D) = X$. Di conseguenza $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(C)$ è il denso numerabile cercato. □

Proposizione 5.2.21: *Siano* H *uno spazio di Hilbert su* $\mathbb{K}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *una successione e* $x \in H$. *Allora* $x_n \to x$ *nella topologia forte se e solo se*

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\| \to \|x\|. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $x_n \to x$ allora $x_n \rightharpoonup x$ (Proposizione 5.2.13) ed $\|x_n\| \to \|x\|$ per la continuità della norma. Viceversa vale

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}((x_n \cdot x)) \\ &= \|x_n\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\|^2 - \operatorname{Re}((x_n \cdot x))) \end{aligned}$$

ed il funzionale $H \ni y \mapsto \operatorname{Re}((y, x))$ è continuo, dunque per la convergenza debole di x_n a x si ha $\|x\|^2 - \operatorname{Re}((x_n \cdot x)) = o(1)$. Di conseguenza per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \|x\|^2 + o(1) = o(1).$$

□

5.3 Polare e Teoremi di Banach-Alaoglu e di Goldstine

Definizione 5.3.1 (Polare): Siano X SVT e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Definiamo il *polare* di S come

$$S^\circ = \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1 \;\; \forall x \in S\}.$$

Osservazione 5.3.2: Siano X uno SVT e $S \subset X$. Allora

$$S^\circ = \bigcap_{x\in S} \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1\}$$

è intersezione di convessi w*-chiusi, dunque è convesso w*-chiuso.

Proposizione 5.3.3: *Siano* X *SVT,* $S \subset X$ *un suo convesso assorbente e* p_S *il suo funzionale di Minkowski. Allora vale*

$$S^\circ = \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le p_S(x) \;\; \forall x \in X\}.$$

Dimostrazione. Sia $A = \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le p_S(x) \;\; \forall x \in X\}$. Se $f \in S^\circ$ e $x \in X$ allora $\forall r > p_S(x) \;\; \exists t > 0$ con $p_S(x) \le t \le r$ t.c. $x \in tS$. Ma allora $\frac{1}{t}x \in S$ e quindi

$$\left|\left\langle f, \frac{1}{t}x \right\rangle\right| \le 1$$

da cui

$$|\langle f, x\rangle| \leq t \leq r$$

e questo vale $\forall r > p_S(x)$. Di conseguenza $|\langle f, x\rangle| \leq p_S(x) \quad \forall x \in X$. Se invece $f \in A$ allora $\forall x \in S$ vale

$$|\langle f, x\rangle| \leq p_S(x) \leq 1$$

ossia $f \in S^\circ$. □

Teorema 5.3.4 (di Banach-Alaoglu): *Siano X SVT e $V \subset X$ intorno convesso di 0. Allora V° è convesso ed è compatto in $(X^*, \sigma(X^*, X))$ (ossia è w*-compatto). In particolare $\overline{B}_{X^*}$ è w*-compatto.*

Dimostrazione. Nell'Osservazione 5.3.2 abbiamo dimostrato che un polare è sempre convesso. Dimostriamo la compattezza debole*. Essendo V intorno di 0 si ha che V è assorbente e quindi $p_V(x) < \infty$ per ogni $x \in X$. Inoltre per ogni $f \in \mathbb{K}^X$ si ha che $f \in V^\circ$ se e solo se f è lineare e $f(x) \in \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, p_v(x))$ (questo perché $f(x) \leq 1$ su V garantisce la continuità).
Allora

$$V^\circ = X' \cap \prod_{x \in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, p_V(x)) \subset \mathbb{K}^X$$

allora V° è compatto in $\mathbb{K}^X$ rispetto alla topologia prodotto in quanto chiuso (perché X' è chiuso nella topologia prodotto di $\mathbb{K}^X$ essendo $X' = \bigcap_{\substack{x,y \in X \\ \alpha \in \mathbb{K}}} \mathrm{Ker}[\mathrm{ev}_{x+\alpha y} - (\mathrm{ev}_x - \alpha \mathrm{ev}_y)]$) in un compatto (infatti $\prod_{x \in X} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, p_V(x))$ è compatto per il Teorema di Tychonoff). Ma la topologia prodotto di $\mathbb{K}^X$ induce su X^* la topologia $\sigma(X^*, X)$ e $V^\circ \subset X^* \subset \mathbb{K}^X$, dunque V° è anche w*-compatto in X^*.

L'ultima affermazione dell'enunciato segue dal fatto che $(\overline{B}_X)^\circ = \overline{B}_{X^*}$ (semplice verifica). □

Teorema 5.3.5 (di Goldstine): *Sia $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach. Consideriamo l'immersione canonica per valutazioni $\Phi : X \hookrightarrow X^{**}$ allora $\Phi(\overline{B}_X)$ è w*-denso in $\overline{B}_{X^{**}}$, ossia è denso nello spazio $(\overline{B}_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*)_{|\overline{B}_{X^{**}}})$.*

Dimostrazione. In tutta la dimostrazione sarà $B = \Phi(\overline{B}_X)$. Essendo l'inclusione Φ isometrica si ha $B \subset \overline{B}_{X^{**}}$ ma $\overline{B}_{X^{**}}$ è chiaramente w*-chiuso, dunque si ha $\overline{B}^{w*} \subset \overline{B}_{X^{**}}$. Dimostriamo quindi l'altra inclusione. Sia $\zeta \in X^{**} \setminus \overline{B}^{w*}$. Usando il Teorema 4.3.4 di Hahn-Banach seconda forma geometrica, con $\{\zeta\}$ e $\overline{B}^{w*}$ (che è convesso e chiuso), si trova un funzionale $\phi : X^{**} \to \mathbb{K}$ che sia $\sigma(X^{**}, X^*)$-continuo, quindi una valutazione su un $\varphi \in X^*$ che separa (in senso forte) ζ da $\overline{B}^{w*} \supset B$. Ma allora si trova

$$\langle \zeta, \varphi\rangle > 1 \geq |\langle \varphi, x\rangle| \;\; \forall x \in \overline{B}_X$$

dove sfruttiamo la simmetria della palla per mettere il modulo. Quindi $\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$ e allora $\|\zeta\|_{X^{**}} \geq \langle \zeta, \varphi\rangle > 1$ dunque $\zeta \notin \overline{B}_{X^{**}}$. □

5.4 Topologie Polari sul Duale e Teoremi di Dieudonné

In tutto il resto della sezione sarà fissato $(X, \|.\|)$ spazio di Banach. Inoltre nel seguito indicheremo le *parti* di X con $\mathcal{P}(X)$ e le *parti finite* di X con $\mathscr{P}_f(X)$.

Teorema 5.4.1 (di Mazur): *Sia $K \subset X$ un compatto. Allora $\overline{co}(K)$ è compatto.*

Dimostrazione. Ovviamente $\overline{co}(K)$ è completo essendo chiuso di un completo. Proviamo che è totalmente limitato. Sia $\varepsilon > 0$, per compattezza di K, esiste $F \subset K$ finito t.c.

$$K \subset F + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_X \subset \mathrm{co}(F) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_X$$

ma somma di convessi è convessa dunque abbiamo anche

$$\mathrm{co}(K) \subset \mathrm{co}(F) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_X.$$

Dico che $\mathrm{co}(F)$ è compatto, infatti è immagine della mappa continua

$$\Delta_{n-1} = \left\{\lambda \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\} \ni \lambda \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in X$$

con $\{f_i\}_{i=1,\dots,n} = F$, ma Δ_{n-1} è compatto da cui segue quanto voluto. La compattezza appena dimostrata ci assicura l'esistenza di un $G \subset \mathrm{co}(F)$ finito t.c.

$$\mathrm{co}(F) \subset G + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_X$$

dunque abbiamo

$$\mathrm{co}(K) \subset G + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_X + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_X = G + \varepsilon\overline{B}_X$$

ma $G + \varepsilon\overline{B}_X$ è chiuso dunque vale

$$\overline{\mathrm{co}}(K) \subset G + \varepsilon\overline{B}_X.$$

L'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ci assicura quindi che $\overline{\mathrm{co}}(K)$ è totalmente limitato. □

Teorema 5.4.2 (di Dieudonné): *Sia $K \subset X$ un compatto. Allora $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ t.c. $\|x_n\| \to 0$ e $K \subset \overline{co}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.*

Dimostrazione. Essendo K compatto esiste un $R > 0$ t.c. $K \subset \overline{B}(0,R)$, supponiamo senza perdita di generalità $R = 1$. Per compattezza di K vale che $\forall n \in N \;\; \exists F_n \in \mathscr{P}_f(K)$ t.c.

$$K \subset F_n + 4^{-n}\overline{B}_X.$$

Allora $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è denso in K. Avendo assunto $K \subset \overline{B}_X$ prendiamo $F_0 = \{0\}$. Sia $y \in D$, allora $y_n = y \in F_n$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$. Siccome F_{n-1} è una 4^{-n+1}-rete vi è un $y_{n-1} \in F_{n-1}$ t.c.

$$\|y_n - y_{n-1}\| \le 4^{-n+1}.$$

Procediamo a ritroso fino a trovare $\{y_k\}_{k=0,\dots,n}$ t.c. $y_k \in F_k \;\; \forall k = 0,\dots,n$ e

$$\|y_k - y_{k-1}\| \le 4^{-k+1} \;\; \forall k = 1,\dots,n.$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} y = y_n &= \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{-k}\left(2^k(y_k - y_{k-1})\right) + 2^{-n}\cdot 0 \end{aligned}$$

che è combinazione convessa dei punti $\{2^k(y_k - y_{k-1})\}_{k=1,...,n}$ e $\{0\}$, ma per ogni $k = 1, ..., n$ vale $2^k\|y_k - y_{k-1}\| \le 2^k 4^{-k+1} = 2^{-k+2}$ e quindi

$$2^k(y_k - y_{k-1}) \in 2^k(F_k - F_{k-1}) \cap 2^{-k+2}\overline{B}_X = A_k.$$

Di conseguenza, se $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} A_k$, vale $D \subset \mathrm{co}(A)$, da cui segue $K \subset \overline{\mathrm{co}}(A)$. Inoltre l'insieme A è t.c. $A \setminus \varepsilon\overline{B}_X$ è finito per ogni $\varepsilon > 0$. cioè (essendo numerabile per costruzione) è l'immagine di una $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima. □

Osservazione 5.4.3: Sia X uno SVT.

- Se $S \subset X$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora

$$\begin{aligned}(tS)^\circ &= \{f \in X^* \mid |\langle f, tx\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in S\} \\ &= \{f \in X^* \mid |\langle tf, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in S\} \\ &= \left\{\frac{1}{t}g \in X^* \mid |\langle g, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in S\right\} = \frac{1}{t}S^\circ.\end{aligned}$$

- Se $A, B \subset X$ allora

$$\begin{aligned}(A \cup B)^\circ &= \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in A \cup B\} \\ &= \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in A\} \cap \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in B\} = A^\circ \cap B^\circ.\end{aligned}$$

- Se $\{A_i\}_{i\in I} \subset X$ allora

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} A_i^\circ &= \bigcap_{i\in I}\{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in A_i\} \\ &= \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1 \ \ \forall x \in A_i \ \ \forall i \in I\} \\ &= \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right]^\circ;\end{aligned}$$

- Se $A \subset X$ allora $\mathrm{co}(A)^\circ = A^\circ$. Infatti ovviamente $\mathrm{co}(A)^\circ \subset A^\circ$ e viceversa se $f \in A^\circ$ e $x \in \mathrm{co}(A)$ allora $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $\{a_i\}_{i=1,...,n} \subset [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ e $\{x_i\}_{i=1,...,n} \subset A$ e du conseguenza
$$|\langle f, x\rangle| \le \sum_{i=1}^n a_i|\langle f, x_i\rangle| \le \sum_{i=1}^n a_i = 1$$
ossia $f \in \mathrm{co}(A)^\circ$.

Definizione 5.4.4 (Topologie polari): Sia $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c.

(1) $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = X$;

(2) $\forall A, B \in \mathscr{A} \ \ A \cup B \in \mathscr{A}$;

(3) $\forall A \in \mathscr{A} \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ tA \in \mathscr{A}$.

Definiamo quindi su X^*, spazio duale di X, la *topologia polare* associata ad $\mathscr{A}$ come la topologia indotta dalla famiglia separante di seminorme $\{\|.\|_{\infty,A}\}_{A\in\mathscr{A}}$.

Osservazione 5.4.5: (1) La condizione (1) ci assicura che la famiglia di seminorme $\{\|.\|_{\infty,A}\}_{A\in\mathscr{A}}$ è separante e quindi che la topologia è T1 (dal Teorema 3.2.10).Quindi ogni topologia polare su X^* lo rende uno SVTLC regolare ed in particolare T2 (dal Teorema 3.2.10).

(2) La palla unitaria di $\|.\|_{\infty,A}$ è

$$\{f \in X^* \mid \|f\|_{\infty,A} \leq 1\} = \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \leq 1 \ \ \forall x \in A\} = A^\circ.$$

La condizione (3) ci dice in particolare che per $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ anche $tA \in \mathscr{A}$ e la palla unitaria di $\|.\|_{\infty,tA}$ è

$$(tA)^\circ = \frac{1}{t} A^\circ$$

dunque per $t = n \in \mathbb{N}$ otteniamo gli insiemi

$$\bar{V}(\|.\|_{\infty,A}, n) = \left\{ f \in X^* \mid \|f\|_{\infty,A} \leq \frac{1}{n} \right\}$$

che come sappiamo dal Teorema 3.2.10 formano una base della topologia da SVTLC indotta dalle seminorme $\{\|.\|_{\infty,A}\}_{A\in\mathscr{A}}$ $(\bar{V}(\|.\|_{\infty,A}, n) \supset V(\|.\|_{\infty,A}, n))$, ossia della topologia polare associata ad $\mathscr{A}$. Quindi la famiglia $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \{A^\circ\}_{A\in\mathscr{A}}$ forma una base locale di intorni dell'origine di X con la topologia polare associata ad $\mathscr{A}$.

(3) Se inoltre ogni $A \in \mathscr{A}$ è convesso allora $\|f\|_{\infty,A} = \|f\|_{\infty,\mathrm{co}(A)}$ $\ \forall f \in X^*$.

Passiamo adesso a studiare alcuni esempi notevoli di topologie polari.

Esempio 5.4.6: • La topologia forte indotta dalla norma operatoriale τ_{op} coincide con la topologia polare associata ad $\mathscr{A} = \{S \subset X \mid S \text{ limitato}\}$. Questa topologia è anche detta *topologia della convergenza uniforme sui limitati.*

- La *topologia della convergenza uniforme sui compatti* $\tau_{\mathcal{K}}$ è la topologia polare associata alla famiglia

$$\mathcal{K} = \{K \subset X \mid K \text{ compatto di } X\}$$

o equivalentemente (per il Teorema 5.4.1 di Mazur) quella associata alla famiglia

$$\mathcal{K}_1 = \{K \subset X \mid K \text{ compatto convesso di } X\}$$

o ancora equivalentemente (per il Teorema 5.4.2 di Dieudonnè, insieme al punto (4) dell'Osservazione precedente) quella associata alla famiglia

$$\mathcal{K}_0 = \{K \subset X \mid K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ t.c. } \|x_n\| \to 0\}.$$

- La topologia debole* τ_{w^*} coincide con la topologia polare associata alla famiglia $\mathscr{A} = \mathscr{P}_f(X)$, infatti per ogni $F \in \mathscr{P}_f(X)$ vale $\|f\|_{\infty,F} = \max_{x\in F} |\langle f, x\rangle|$.

Osservazione 5.4.7: Vale la seguente catena di inclusioni:

$$\tau_{\mathrm{op}} \supset \tau_{\mathcal{K}} \supset \tau_{w^*}.$$

Inoltre tutte e tre le topologie hanno gli stessi limitati.

Teorema 5.4.8 (di Dieudonné 1): *Vale l'uguaglianza tra i biduali*

$$(X^*, \tau_{\mathcal{K}})^* = (X^*, \tau_{w^*})^* = \{\mathrm{ev}_x\}_{x\in X}.$$

Dimostrazione. L'uguaglianza $(X^*, \tau_{w^*})^* = \{\mathrm{ev}_x\}_{x\in X}$ segue dalla Proposizione 5.1.13. Essendo $\mathcal{P}_f(X) \subset \mathcal{K}$ vale $\tau_{w^*} \subset \tau_{\mathcal{K}}$. Dunque se $\eta \in (X^*, \tau_{w^*})^*$ allora $\eta \in (X^*, \tau_{\mathcal{K}})^*$. Viceversa prendiamo un $\phi \in (X^*, \tau_{\mathcal{K}})^*$, dimostriamo che è una valutazione su un elemento di X. Per la continuità rispetto a $\tau_{\mathcal{K}}$, grazie alla Proposizione 3.3.5, si ha l'esistenza di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, con $\|x_n\| \to 0$, t.c.

$$|\langle \phi, f\rangle| \le \|f\|_{\infty,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = \max_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, x_n\rangle| \;\; \forall f \in X^*.$$

Infatti la Proposizione 3.3.5 ci garantisce che esistono $\{(x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}\}_{j=0,\dots,m-1} \subset \mathcal{K}_0$, $m \in \mathbb{N}$, t.c.

$$|\langle \phi, f\rangle| \le \max_{0\le j\le m-1} \|f\|_{\infty,\{x_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

e definita $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$x_{km+j} = x_k^{(j)} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall j = 0, \dots, m-1$$

è semplice notare che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}_0$ e vale

$$\max_{0\le j\le m-1} \|f\|_{\infty,\{x_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}} = \|f\|_{\infty,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

quindi effettivamente

$$|\langle \phi, f\rangle| \le \|f\|_{\infty,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}. \tag{5.1}$$

Consideriamo adesso l'operatore lineare

$$X^* \ni f \xmapsto{T} (\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$$

(infatt essendo $\|x_n\| \to 0$ ed $f \in X^*$ vale anche $|\langle f, x_n\rangle| \to 0$). E sull'immagine $T(X^*) \subset c_0$ è ben definita l'applicazione lineare

$$T(X^*) \ni (\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \xmapsto{\psi} \langle \phi, f\rangle \in \mathbb{K}$$

infatti se $\langle f, x_n\rangle = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ allora $\langle \phi, f\rangle = 0$ per l'eq. (5.1). Inoltre munendo c_0 dell' usuale norma del sup $\|.\|_\infty$, sempre l'eq. (5.1) ci dice

$$|\langle \phi, f\rangle| \le \|(\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$$

ossia che ψ è continua. Quindi, per il Corollario 4.1.2 (o il Corollario 4.1.3), ψ si estende ad una forma lineare continua definita su tutto c_0. Quindi, essendo c_0^* linearmente isometrico a ℓ^1, esiste un $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ t.c.

$$\langle \phi, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle f, x_n\rangle = \left\langle f, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n \right\rangle$$

in cui l'ultima uguaglianza vale perché $f : X \to \mathbb{K}$ è continua e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n$ è una serie normalmente convergente in X che è completo (e quindi la serie converge anche in X), infatti

$$\|\lambda_n x_n\| \le |\lambda_n| \max_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = C|\lambda_n|$$

e $\lambda \in \ell^1$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\langle \phi, f\rangle = \langle f, u\rangle \;\; \forall f \in X^*$$

con $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n \in X$. $\square$

Un'immediata ed interessante conseguenza del teorema appena dimostrato è descritta nel seguente corollario.

Corollario 5.4.9: *Sia μ una misura boreliana finita concentrata su un compatto $K \subset X$. Consideriamo il funzionale integrale su X^* associato a μ*

$$X^* \ni f \overset{\phi_\mu}{\longmapsto} \int_K f d\mu \in \mathbb{K}.$$

Allora esiste un $u \in X$ t.c.

$$\int_K f d\mu = \langle f, u \rangle \ \ \forall f \in X^*.$$

Il vettore u rappresenta il "baricentro della misura μ".

Dimostrazione. Il polare K° è un intorno di $0 \in X^*$ nella topologia $\tau_{\mathcal{K}}$ e vale

$$\langle \phi_\mu, f \rangle = \int_K f d\mu \leq \mu(K) < +\infty \ \ \forall f \in K^\circ$$

ossia il funzionale integrale ϕ_μ è limitato in un intorno di $0 \in X^*$ e questo, grazie al Teorema 3.3.2, ci dà la continuità di ϕ_μ rispetto alla topologia $\tau_{\mathcal{K}}$ su X^*. Ma allora $\phi_\mu \in (X^*, \tau_{\mathcal{K}})^*$ e quindi per il Teorema 5.4.8 di Dieudonné 1, ϕ_μ è la valutazione per un qualche $u \in X$. □

Definizione 5.4.10: Siano $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ spazi topologici t.c.

$$X_n \subset X_{n+1} \ \text{ e } \ \tau_n \subset \tau_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiamo $X_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e con questo prendiamo le inclusioni $J_n : X_n \hookrightarrow X_\infty$, dunque definiamo τ_∞ come la più fine topologia su X_∞ che rende continue le inclusioni $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tale topologia è detta *topologia limite* delle $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 5.4.11: Mettiamoci nel contesto della definizione precedente, supponiamo che σ sia una topologia su X_∞ che rende continue le inclusioni $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e consideriamo la topologia

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \cap X_n \in \tau_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Ovviamente, dovendo σ rendere continue le $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, vale $\sigma \subset \tau$. Dunque τ è più fine di ogni topologia che rende continue le $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dunque $\tau = \tau_\infty$.

Proposizione 5.4.12: *Siano $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ spazi topologici t.c. $X_n \subset X_{n+1}$ e $\tau_n \subset \tau_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $X_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Consideriamo la topologia limite delle $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τ_∞. Dico che*

$$\tau_\infty = \left\{ A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \tau_n, \ \ A_n \subset A_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Definizione 5.4.13: Siano X spazio normato e X^* il suo spazio duale. Su X^* è ben definita la topologia limite associata alle inclusioni

$$(n\overline{B}_{X^*}, (\tau_{w^*})_{|n\overline{B}_{X^*}}) \hookrightarrow X^*$$

tale topologia è detta *topologia debole* limitata* e la indicheremo con τ_{bw^*}. Chiameremo il suoi aperti *bw*-aperti*, i suoi chiusi *bw*-chiusi*, i suoi compatti *bw*-compatti*, i suoi limitati *bw*-limitati*, la chiusura rispetto a questa topologia $\overline{S}^{bw*}$ ed i suoi densi *bw*-densi*.

Osservazione 5.4.14: Nel contesto della definizione precedente un $A \subset X^*$ è bw*-aperto (bw*-chiuso) se e solo se $A \cap n\overline{B}_{X^*}$ è w*-aperto (w*-chiuso) in $n\overline{B}_{X^*}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare quindi $\tau_{bw^*} \supset \tau_{w^*}$.

Teorema 5.4.15 (di Dieudonné 2): *Su X^* sono definite le topologie τ_{bw^*} e $\tau_{\mathcal{K}}$. In realtà vale*

$$\tau_{bw^*} = \tau_{\mathcal{K}}.$$

Dimostrazione. Come abbiamo in precedenza osservato, una base locale di intorni per $\tau_{\mathcal{K}}$ è

$$\{A^\circ \mid A \in \mathcal{K}_0\}$$

in cui $\mathcal{K}_0 = \{K \subset X \mid K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ t.c. } \|x_n\| \to 0\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale

$$\begin{aligned} A^\circ \cap n\overline{B}_{X^*} &= A^\circ \cap n(\overline{B}_X)^\circ \\ &= A^\circ \cap (n^{-1}\overline{B}_X)^\circ \\ &= (A \cup (n^{-1}\overline{B}_X))^\circ \\ &= [(A \setminus (n^{-1}\overline{B}_X)) \cup (n^{-1}\overline{B}_X)]^\circ \\ &= (A \setminus (n^{-1}\overline{B}_X))^\circ \cap (n^{-1}\overline{B}_X)^\circ = (A \setminus (n^{-1}\overline{B}_X))^\circ \cap n\overline{B}_{X^*} \end{aligned}$$

ma $A \setminus (n^{-1}\overline{B}_X)$ è finito, dunque

$$(A \setminus (n^{-1}\overline{B}_X))^\circ = \bigcap_{x \in A\setminus(n^{-1}\overline{B}_X)} \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \le 1\}$$

è un'intersezione finita e di conseguenza $(A \setminus (n^{-1}\overline{B}_X))^\circ$ un w*-intorno di $0 \in X^*$. Da questo segue che ogni aperto di $\tau_{\mathcal{K}}$ induce su ogni palla $n\overline{B}_{X^*}$, con $n \in \mathbb{N}_+$, un w*-aperto di $n\overline{B}_{X^*}$. Quindi vale $\tau_{\mathcal{K}} \subset \tau_{bw^*}$ (Osservazione 5.4.14). Vediamo l'inclusione opposta. Sia U intorno aperto dell'origine di X^* nella topologia τ_{bw^*}. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ l'insieme $U \cap n\overline{B}_{X^*}$ è aperto in $(\tau_{w^*})_{|n\overline{B}_{X^*}}$, quindi esiste un $A_n \in \mathcal{P}_f(X)$ t.c.

$$A_n^\circ \cap n\overline{B}_{X^*} \subset U$$

(in quanto la topologia debole* è la topologia polare associata alla famiglia di insiemi $\mathcal{P}_f(X)$). Inoltre, come dimostreremo tra poco, possiamo prendere gli $A_n \in \mathcal{P}_f(X)$ t.c. $A_n \setminus A_{n-1} \subset (n-1)^{-1}\overline{B}_X$ per $n \ge 2$. In particolare, preso $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} A_n$, si ha che $A \setminus \varepsilon\overline{B}_X$ è finito per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi A° è intorno dell'origine di X^* nella topologia $\tau_{\mathcal{K}}$. Ma essendo $A^\circ \subset A_n^\circ$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$ vale anche

$$A^\circ \cap n\overline{B}_{X^*} \subset U \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

Da questo segue che esiste un intorno aperto in $\tau_{\mathcal{K}}$ dell'origine di X^* contenuto in U e quindi che $\tau_{\mathcal{K}} \supset \tau_{bw^*}$. Costruiamo quindi gli insiemi A_n adeguati. Lo facciamo per ricorsione. Sia $A_1 \in \mathcal{P}_f(X)$ t.c.

$$A_1^\circ \cap \overline{B}_{X^*} \subset U.$$

Poi supponiamo che sia definito $A_n \in \mathcal{P}_f(X)$ t.c.

$$A_n^\circ \cap n\overline{B}_{X^*} \subset U$$

si ha

$$\begin{aligned}
\emptyset &= A_n^\circ \cap n\overline{B}_{X^*} \cap U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*} \\
&= A_n^\circ \cap n\left(\bigcup_{x\in\overline{B}_X}\{x\}\right)^\circ \cap U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*} \\
&= A_n^\circ \cap n \bigcap_{x\in\overline{B}_X}\{x\}^\circ \cap U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*} \\
&= A_n^\circ \cap \bigcap_{x\in\overline{B}_X}\{n^{-1}x\}^\circ \cap U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*} \\
&= \bigcap_{x\in\overline{B}_X}[A_n \cup \{n^{-1}x\}]^\circ \cap [U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*}]
\end{aligned}$$

ma $U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*}$ è w*-chiuso in $(n+1)\overline{B}_{X^*}$ (U è bw*-aperto) ed anche $\bigcap_{x\in\overline{B}_X}[A_n \cup \{n^{-1}x\}]^\circ$ è w*-chiuso in $(n+1)\overline{B}_{X^*}$, ma $(n+1)\overline{B}_{X^*}$ è w*-compatto, quindi ci deve essere un $J_n \in \mathscr{P}_f(\overline{B}_X)$ t.c.

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \bigcap_{x\in\overline{B}_X}[A_n \cup \{n^{-1}x\}]^\circ \cap [U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*}] \\
&= \bigcap_{x\in J_n}[A_n^\circ \cap \{n^{-1}x\}^\circ] \cap [U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*}] \\
&= A_n^\circ \cap n \bigcap_{x\in J_n}\{x\}^\circ \cap [U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*}] \\
&= [A_n \cup n^{-1}J_n]^\circ \cap U^c \cap (n+1)\overline{B}_{X^*}
\end{aligned}$$

cioè definendo $A_{n+1} = A_n \cup n^{-1}J_n$ si ha

$$A_{n+1}^\circ \cap (n+1)\overline{B}_{X^*} \subset U$$

ed ovviamente vale $n^{-1}J_n \subset n^{-1}\overline{B}_X$. Dunque $A_{n+1} \setminus A_n = n^{-1}J_n \subset n^{-1}\overline{B}_X$, di conseguenza $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ così definita fa quello che deve fare. □

Un importante corollario dei teoremi di Dieudonné 1 e 2 è il seguente teorema che caratterizza i convessi w*-chiusi del duale.

Teorema 5.4.16 (di Krein-Šmulian): *Sia $C \subset X^*$ un convesso. Allora C è w*-chiuso se e solo se $n\overline{B}_{X^*} \cap C$ è w*-chiuso $\forall n \in \mathbb{N}_+$.*

Dimostrazione. Ovviamente se C è w*-chiuso allora $n\overline{B}_{X^*} \cap C$ è w*-chiuso $\forall n \in \mathbb{N}_+$. Dimostriamo il viceversa. Dire che $n\overline{B}_{X^*} \cap C$ è w*-chiuso $\forall n \in \mathbb{N}_+$ equivale a dire C bw*-chiuso, ossia chiuso per $\tau_{\mathcal{K}}$ (Teorema 5.4.15 di Dieudonné 2). Per il Teorema 4.3.4 di Hahn-Banach (seconda forma geometrica) due topologie su uno spazio vettoriale X che lo rendono SVTLC e con lo stesso duale hanno anche gli stessi convessi chiusi, quindi nel nostro caso si ha la tesi grazie al Teorema 5.4.8 di Dieudonné 1. □

6

Teoria degli Operatori Lineari Limitati, prima parte

6.1 Teorema delle Categorie di Baire

Definizione 6.1.1: Sia X uno spazio topologico. Un $E \subset X$ è detto *mai denso* se $\mathring{\overline{E}} = \emptyset$. Inoltre E è detto di *I-categoria* in X se è unione numerabile di insiemi mai densi di X, altrimenti E è detto di *II-categoria* in X.

Proposizione 6.1.2: *Sia X spazio topologico.*

(1) Siano $A, B \subset X$, se $A \subset B$ e B è di I-categoria allora anche A lo è.

(2) Un unione numerabile di insiemi di I-categoria è di I-categoria.

(3) Un $C \subset X$ chiuso è di I-categoria se e solo se $\mathring{C} = \emptyset$.

(4) Sia $f : X \longrightarrow X$ un omeomorfismo e $E \subset X$. Allora E e $f(E)$ sono di stessa categoria.

Teorema 6.1.3 (di Baire): *Supponiamo che X sia*

(1) uno spazio metrico completo, o

(2) uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff.

Allora se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di aperti densi di X vale che anche $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un aperto denso di X.

Dimostrazione. (Facoltativo) Sia $B_0 \subset X$ un qualsiasi aperto aperto non vuoto. Per $n \geq 1$ definiamo per ricorrenza $B_n \neq \emptyset$ nel seguente modo: abbiamo $B_{n-1} \neq \emptyset$ aperto, essendo A_n denso vale $A_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ e sia che valga (1) sia che valga (2) è possibile trovare un $B_n \neq \emptyset$ aperto t.c.

$$\overline{B_n} \subset A_n \cap B_{n-1}. \tag{6.1}$$

Se vale (1) B_n può essere una palla di raggio minore di 2^{-n}; mentre se vale (2), per locale compattezza, B_n può essere preso t.c. $\overline{B_n}$ è compatto. In entrambi i casi prendiamo

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} \overline{B_n}.$$

Nel caso valga (1) i centri delle palle innestate B_n formano per costruzione una successione di Cauchy che per completezza di X converge e converge in realtà ad un punto di K che quindi è necessariamente non vuoto. Se vale (2) $K \neq \emptyset$ perché è intersezione di compatti innestati non vuoti. Ma allora in entrambi i casi $K \neq \emptyset$ e $K \subset B_0 \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} A_n$, dunque $B_0 \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} A_n \neq \emptyset$. □

Corollario 6.1.4: *Ogni spazio metrico completo e ogni spazio topologico localmente compatto di Hausdorff è di II-categoria.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Sia X uno spazio metrico completo o uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff e siano $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi mai densi di X. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \overline{E_n}^c$$

e notiamo che essendo $\mathring{\overline{E_n}} = \emptyset$ vale che $\overline{A_n} = X$, ossia ogni A_n è un aperto denso di X, quindi per il Teorema 6.1.3 di Baire anche $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è denso in X, in particolare è non vuoto, dunque

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n^c \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

da cui $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq X$. □

6.2 Teorema di Banach-Steinhaus e di Uniforme Limitatezza

Definizione 6.2.1: Dati due SVT X, Y denotiamo

$$\mathrm{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ lineare continuo}\}.$$

Definizione 6.2.2: Siano X, Y SVT. Una famiglia $\Gamma \subset \mathrm{L}(X,Y)$ è detta *equicontinua* se $\forall U \subset Y$ intorno dell'origine $\exists V \subset X$ intorno dell'origine t.c. $\forall T \in \Gamma \;\; T(V) \subset U$. Ossia denotando

$$\Gamma(V) = \bigcup_{T\in\Gamma} T(V)$$
$$\Gamma^{-1}(U) = \bigcap_{T\in\Gamma} T^{-1}(U)$$

se vale $\Gamma(V) \subset U$ o se vale $V \subset \Gamma^{-1}(U)$.

Proposizione 6.2.3: *Siano X, Y SVTLC su $\mathbb{K}$ con topologia indotta rispettivamente dalle famiglie di seminorme $\{p_i\}_{i\in I}$ e $\{q_j\}_{j\in J}$. Siano $L_k : X \to Y$ funzioni lineari per ogni $k \in \mathbb{N}$, sono equivalenti:*

(1) $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equicontinua;

(2) per ogni $j \in J$ esistono $I_j \subset I$ finito ed $M_j > 0$ t.c.

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} q_j(L_k x) \leq M_j \max_{i\in I_j} p_i(x) \;\; \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Non è difficile adattare la dimostrazione del Teorema 3.3.4 (tutte le stime ed i passaggi fatti con L in tale dimostrazione vale con L_k e per ogni $k \in \mathbb{N}$). □

Osservazione 6.2.4: Nel contesto della definizione precedente, alla condizione data è equivalente anche

$$\forall U \subset Y \text{ intorno dell'origine } \Gamma^{-1}(U) \text{ è intorno dell'origine.}$$

Teorema 6.2.5 (di Banach-Steinhaus): *Siano X, Y SVT. Sia $\Gamma \subset \mathrm{L}(X, Y)$ puntualmente limitata su sottoinsieme di II-categoria di X. Allora Γ è equicontinua.*

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ un intorno bilanciato di $0 \in Y$ e V un intorno bilanciato chiuso di $0 \in Y$ t.c. $V - V \subset U$. Sia

$$S = \{x \in X \mid \Gamma(x) \text{ è limitato in } Y\}.$$

Per ogni $x \in S$, essendo $\Gamma(x)$ limitato, esiste un $n_x \in \mathbb{N}$ t.c. $\Gamma(x) \subset n_x V$, ossia $Tx \in n_x V \ \ \forall T \in \Gamma$, cioè $x \in T^{-1}(n_x V) = n_x T^{-1}(V) \ \ \forall T \in \Gamma$, ovvero $x \in n_x \Gamma^{-1}(V)$. Dunque

$$S \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} n\Gamma^{-1}(V).$$

Ma per ipotesi S è di II-categoria, dunque almeno per un $n \in \mathbb{N}_+$ deve essere $n\overset{\circ}{\Gamma^{-1}}(V) \neq \emptyset$ e di conseguenza si ottiene che $\overset{\circ}{\Gamma^{-1}}(V) \neq \emptyset$. In particolare possiamo concludere che $\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$ è un intorno aperto di $0 \in X$. Valendo $V - V \subset U$ si ha

$$T^{-1}(V) - T^{-1}(V) = T^{-1}(V - V) \subset T^{-1}(U)$$

e quindi

$$\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V) \subset T^{-1}(V) - T^{-1}(V) \subset T^{-1}(U) \ \ \forall T \in \Gamma$$

da cui possiamo concludere

$$\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V) \subset \Gamma^{-1}(U).$$

Dunque $\Gamma^{-1}(U)$ è un anch'esso un intorno di $0 \in X$, quindi per arbitrarietà di U intorno aperto bilanciato di $0 \in Y$ (esiste sempre una base locale di intorni aperti bilanciati) Γ è equicontinua. □

Teorema 6.2.6 (di uniforme limitatezza): *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $\Gamma \subset \mathrm{L}(X, Y)$. Se vale*

$$\sup_{T \in \Gamma} \|Tx\|_Y = M_x < +\infty \ \ \forall x \in X$$

allora Γ è limitata nella norma operatoriale.

Dimostrazione. Avendo X una struttura di spazio metrico completo, per il Corollario 6.1.4 del Teorema di Baire, è di II-categoria. Dunque le ipotesi del Teorema 6.2.5 di Banach-Steinhaus sono verificate e possiamo concludere che Γ è equicontinua, cioè, essendo Γ famiglia di operatori lineari continui tra spazi normati, $\exists C > 0$ t.c.

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \ \ \forall T \in \Gamma \ \ \forall x \in X$$

di conseguenza

$$\|T\|_{\mathrm{op}} \leq C \ \ \forall T \in \Gamma.$$

□

Proposizione 6.2.7: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(X, Y)$ puntualmente convergente a $T : X \longrightarrow Y$. Allora T è un operatore lineare continuo con*

$$\|T\|_{op} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{op} < +\infty.$$

Dimostrazione. Le ipotesi del Teorema 6.2.6 di uniforme limitatezza sono ovviamente verificate, dunque si ottiene che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\text{op}} = C < +\infty$. Inoltre

$$\|T_n x\|_Y \leq C\|x\|_X \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in X$$

dunque

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \;\; \forall x \in X$$

Ovviamente T è lineare, dunque si ha la tesi. □

Proposizione 6.2.8 (Continuità di operatori bilineari): *Siano* $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y), (Z, \|.\|_Z)$ *spazi di Banach e* $b : X \times Y \to Z$ *un operatore bilineare. Se*

(1) $X \ni x \longmapsto b(x, y) \in Z$ *è continua per ogni* $y \in Y$*;*

(2) $Y \ni y \longmapsto b(x, y) \in Z$ *è continua per ogni* $x \in X$*;*

allora b *è continua.*

Dimostrazione. La famiglia $\mathscr{F}_X = \{b(x, .)\}_{x\in\overline{B}_X}$, con $\overline{B}_X$ la palla unitaria chiusa di X, è fatta di operatori lineari continui ed è puntualmente limitata in quanto

$$\sup_{x\in\overline{B}_X} \|b(x, y)\|_Z = \|b(., y)\|_{\text{op}} < +\infty \;\; \forall y \in Y$$

in quanto $b(., y) : X \to Z$ è continua per ogni $y \in Y$. Dunque essendo $\overline{B}_X$ chiuso in uno spazio di Banach possiamo applicare il Teorema 6.2.6 di uniforme limitatezza e dire che $\mathscr{F}_X$ è limitata nella norma operatoriale di $\mathrm{L}(Y, Z)$, ossia

$$\sup_{x\in\overline{B}_X} \|b(x, .)\|_{\text{op}} \leq M < +\infty$$

ma $\sup_{x\in\overline{B}_X} \|b(x, .)\|_{\text{op}} = \sup_{\substack{x\in\overline{B}_X \\ y\in\overline{B}_Y}} \|b(x, y)\|_Z$, dunque

$$\sup_{\substack{x\in\overline{B}_X \\ y\in\overline{B}_Y}} \|b(x, y)\|_Z \leq M < +\infty$$

e questo per linearità ci dà alla tesi. □

Proposizione 6.2.9: *Siano* $(X, \|.\|)$ *spazio di Banach,* X^* *il suo spazio duale e* $\Gamma \subset X^*$*. Allora* Γ *è w*-limitato se e solo se* Γ *è limitato nella norma operatoriale su* X^**.*

Dimostrazione. Se Γ non è w*-limitato, allora esiste un intorno aperto $U \in \sigma(X^*, X)$ di $0 \in X^*$ che non assorbe Γ. Ma la topologia debole* è meno fine della topologia della norma operatoriale, dunque U è aperto anche rispetto a quest'ultima topologia, ma allora esiste una palla $B(0, r) \subset U \subset X^*$. Dunque per ogni $t > 0$ vale $tB(0, r) = B(0, tr) \subset tU$ e di conseguenza non può assorbire Γ, che quindi non è limitato anche nella norma operatoriale di X^*.

Viceversa se Γ è w*-limitato, allora Γ è assorbito da ogni intorno di $0 \in X^*$ del tipo

$$U_x = \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| < 1\} \;\text{ con }\; x \in X$$

dunque per ogni $x \in X$ esiste un $n_x \in \mathbb{N}$ t.c. $\Gamma \subset n_x U_x$, che implica

$$|\langle f, x\rangle| < n_x \;\; \forall x \in X \;\; \forall f \in \Gamma$$

quindi si applica il Teorema 6.2.6 di uniforme limitatezza che ci dà la tesi. □

Proposizione 6.2.10: *Siano* $(X, \|.\|)$ *spazio di Banach e* $\Gamma \subset X$. *Allora* Γ *è w-limitato se e solo se è limitato nella norma di* X.

Dimostrazione. Se Γ non è w-limitato allora esiste un intorno aperto $U \in \sigma(X, X^*)$ di $0 \in X$ che non assorbe Γ . Ma la topologia debole è meno fine della topologia della norma di X, dunque U è aperto anche rispetto a quest'ultima topologia, ma allora esiste una palla $B(0, r) \subset U \subset X$. Dunque per ogni $t > 0$ vale $tB(0, r) = B(0, tr) \subset tU$ e di conseguenza non può assorbire Γ, che quindi non è limitato anche nella norma di X.

Viceversa se Γ è w-limitato, allora Γ è assorbito da ogni intorno di $0 \in X$ del tipo

$$U_\phi = \{y \in X \mid |\langle \phi, y\rangle| < 1\} \text{ con } \phi \in X^*$$

dunque per ogni $\phi \in X^*$ esiste un $n_\phi \in \mathbb{N}$ t.c. $\Gamma \subset n_\phi U_\phi$, che implica

$$|\langle \phi, x\rangle| < n_\phi \ \ \forall \phi \in X^* \ \ \forall x \in \Gamma$$

ossia

$$|\langle \mathrm{ev}_x, \phi\rangle| < n_\phi \ \ \forall \phi \in X^* \ \ \forall x \in \Gamma$$

quindi si applica il Teorema 6.2.6 di uniforme limitatezza e si trova che $\{\mathrm{ev}_x\}_{x\in\Gamma}$ è limitata nella norma operatoriale di X^{**}. Ma se $\Phi : X \hookrightarrow X^{**}$ è l'inclusione canonica nel biduale per valutazioni, questa è isometrica e $\{\mathrm{ev}_x\}_{x\in\Gamma} = \Phi(\Gamma)$, dunque anche Γ è limitata nella norma di X. □

6.3 Teoremi della Mappa Aperta e del Grafico Chiuso

Nel seguito di questa sezione tutti gli spazi vettoriali saranno su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 6.3.1 (della mappa aperta): *Siano* $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *spazi di Banach e* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ *surgettiva. Allora* T *è aperta.*

Dimostrazione. Denotiamo con B_X e $\overline{B}_X$ rispettivamente la palla unitaria aperta e la palla unitaria chiusa di X.

Passo 1: *Usando la completezza di* Y *dimostriamo che* $\overline{T(B_X)}$ *è un intorno di* $0 \in Y$.

Osserviamo che $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} nB_X$, dunque

$$Y = T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} nT(B_X)$$

ma Y ha una struttura da spazio metrico completo, dunque per il Corollario 6.1.4 del Teorema di Baire è di II-categoria e di conseguenza esiste necessariamente un $n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $\mathring{(\overline{nT(B_X)})} \neq \emptyset$, ma allora $\mathring{(\overline{T(B_X)})} \neq \emptyset$. Dunque esiste un aperto $A \subset Y$ t.c. $\emptyset \neq A \subset \overline{T(B_X)}$ e quindi

$$0 \in A - A \subset \overline{T(B_X)} - \overline{T(B_X)}$$

ossia $\overline{T(B_X)} - \overline{T(B_X)}$ è un intorno di $0 \in Y$. Inoltre vale

$$\overline{T(B_X)} - \overline{T(B_X)} \subset \overline{T(B_X - B_X)} = 2\overline{T(B_X)}$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la convessità di B_X ed il fatto che $T(x - x') = 2T(2^{-1}(x - x')))$ allora $2\overline{T(B_X)}$ è un intorno di $0 \in Y$ e quindi anche $\overline{T(B_X)}$ lo è.

Passo 2: *Usando la completezza di* X *dimostriamo che* $T(B_X)$ *è un intorno di* $0 \in Y$.

Siccome abbiamo provato che $\overline{T(B_X)}$ è un intorno di $0 \in Y$ allora lo è anche $\frac{1}{2}\overline{T(B_X)}$ e, ricordando che in un qualsiasi SVT la chiusura di un sottoinsieme S è $\overline{S} = \bigcap_{V \in \mathscr{B}}(S+V)$ con $\mathscr{B}$ una qualsiasi base locale di intorni, si ha che

$$\overline{T(B_X)} \subset T(B_X) + \frac{1}{2}\overline{T(B_X)}. \tag{6.2}$$

Dimostriamo che $c\overline{T(B_X)} \subset T(B_X)$ per un qualche $c \in (0,1)$, che prova che $T(B_X)$ è un intorno di $0 \in Y$. Per farlo proviamo prima che $\overline{T(B_X)} \subset 2T(\overline{B}_X)$ che implica $\frac{1}{2}\overline{T(B_X)} \subset T(\overline{B}_X)$ e fatto questo si ha allora che ad esempio $\frac{1}{4}\overline{T(B_X)} \subset T(B_X)$, infatti

$$\frac{1}{4}\overline{T(B_X)} \subset \frac{1}{2}T(\overline{B}_X) = T\left(\frac{1}{2}\overline{B}_X\right) \subset T(B_X).$$

Proviamo allora che $\overline{T(B_X)} \subset 2T(\overline{B}_X)$. Sia $y_0 \in \overline{T(B_X)}$, per l'eq. (6.2) esistono $x_0 \in B_X$ e $y_1 \in \overline{T(B_X)}$ t.c. $y_0 = Tx_0 + \frac{1}{2}y_1$. Iterando il ragionamento si ottiene una successione $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{T(B_X)}$ ed una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_X$ t.c. $y_k = Tx_k + \frac{1}{2}y_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Quindi

$$y_0 = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}Tx_k + 2^{-n-1}y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e per linearità

$$y_0 = T\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}x_k\right) + 2^{-n-1}y_{n+1}$$

ma $\|x_k\|_X < 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}x_k$ è normalmente convergente in X, dunque per completezza converge ad un qualche $x \in X$ con

$$\|x\|_X \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = 2$$

ossia $x \in 2\overline{B}_X$. Inoltre $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata perché $y_k \in \overline{T(B_X)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ dunque

$$\|y_k\|_Y \leq \|T\|_{\mathrm{op}} < +\infty$$

di conseguenza $2^{-k-1}y_k \to 0 \in Y$. Quindi, per continuità di T, si ha $T\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}x_k\right) + 2^{-n-1}y_{n+1} \to Tx$. Dunque in conclusione possiamo scrivere

$$y_0 = Tx \in T(2\overline{B}_X) = 2T(\overline{B}_X)$$

da cui segue $\overline{T(B_X)} \subset 2T(\overline{B}_X)$, che è quanto volevamo provare. □

Corollario 6.3.2: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ bigettiva. Allora T è un omeomorfismo lineare.*

Corollario 6.3.3: *Se $(X, \|.\|_1)$ è uno spazio di Banach e $\|.\|_2$ è un'altra norma completa su X che è più fine di $\|.\|_1$, allora le $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ sono equivalenti.*

Teorema 6.3.4 (del grafico chiuso): *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T : X \to Y$ lineare. Allora T è continua se e solo se $\mathrm{graph}(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in X\}$ è chiuso in $X \times Y$.*

Dimostrazione. Se T è continua allora anche la funzione lineare $\Psi_T : X \times Y \to Y$ t.c. $\Psi_T(x, y) = y - Tx$ è continua e $\mathrm{graph}(T) = \mathrm{Ker}(\Psi_T)$ è quindi chiuso.

Viceversa supponiamo che $\mathrm{graph}(T)$ sia chiuso. Siano $p_X : \mathrm{graph}(T) \to X$ e $p_Y : \mathrm{graph}(T) \to Y$ le proiezioni sulle due componenti, queste sono continue e p_X è bigettiva. Siccome $\mathrm{graph}(T)$ è chiuso in $X \times Y$ che è completo, dunque $\mathrm{graph}(T)$ stesso è completo e, per il Corollario 6.3.2, p_X è un omeomorfismo lineare. Quindi $T = p_Y \circ p_X^{-1}$ è continua. □

Proposizione 6.3.5: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T : X \to Y$ lineare. Allora T è continuo $\|.\|_X \to \|.\|_Y$ se e solo se è continuo $\sigma(X, X^*) \to \sigma(Y, Y^*)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia continuo $\|.\|_X \to \|.\|_Y$. Per la proprietà universale delle topologie iniziali T è continua $\sigma(X, X^*) \to \sigma(Y, Y^*)$ se e solo se $\forall f \in Y^*$ è continua $f \circ T : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{K}$. Ma $f \circ T : (X, \|.\|_X) \to \mathbb{K}$ è continua $\forall f \in Y^*$ e quindi è continua anche $f \circ T : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{K}$ per il Teorema 5.1.13.

Viceversa supponiamo che T sia continuo $\sigma(X, X^*) \to \sigma(Y, Y^*)$. Dimostriamo che il $\mathrm{graph}(T)$ è chiuso in $X \times Y$. Prendiamo $\Psi_T : X \times Y \to Y$ t.c. $\Psi_T(x, y) = y - Tx$, mettendo su $X \times Y$ la topologia prodotto $\sigma(X, X^*) \otimes \sigma(Y, Y^*)$ si ha Ψ_T continua e quindi $\mathrm{graph}(T) = \mathrm{Ker}(\Psi_T)$ è chiuso nella topologia $\sigma(X, X^*) \otimes \sigma(Y, Y^*)$. Ma $\sigma(X, X^*) \otimes \sigma(Y, Y^*)$ è meno fine della topologia prodotto metrica su $X \times Y$, dunque $\mathrm{graph}(T)$ è chiuso anche in quest'ultima. La tesi segue dal Teorema 6.3.4 del grafico chiuso. □

Definizione 6.3.6: Sia X uno SVT e $F_1, F_2 \subset X$ due suoi sottospazi. Se la mappa $F_1 \times F_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X$ è un omeomorfismo allora F_1 ed F_2 sono detti in *somma diretta topologica* e si indica $X = F_1 \oplus F_2$. Diremo in questo caso che F_2 è un *addendo diretto* di F_1.

Proposizione 6.3.7: *Sia $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach, $F_1, F_2 \subset X$ sottospazi lineari in somma diretta algebrica, cioè $X = F_1 \oplus_{alg} F_2$, che equivale a dire che $F_1 \times F_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X$ è bigettiva. Allora la decomposizione è una somma diretta topologica, cioè $F_1 \times F_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X$ è un omeomorfismo, se e solo se F_1 ed F_2 sono chiusi in X.*

Dimostrazione. Se F_1 ed F_2 sono chiusi allora sono completi, quindi anche $F_1 \times F_2$ con l'usuale topologia prodotto è completo e quindi $F_1 \times F_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X$ è un omeomorfismo per il Corollario 6.3.2.

Viceversa sappiamo che $p_1 : F_1 \times F_2 \to F_1$ proiezione è continua, allora $\mathrm{Ker}(p_1) = \{0\} \times F_2$ è chiuso in $F_1 \times F_2$ ed analogamente se $p_2 : F_1 \times F_2 \to F_2$ anche $\mathrm{Ker}(p_2) = F_1 \times \{0\}$ è chiuso in $F_1 \times F_2$, ma $F_1 \times F_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X$ è un omeomorfismo, dunque le sue restrizioni a $\{0\} \times F_2$ e $F_1 \times \{0\}$ costituiscono due omeomorfismi tra questi due spazi e F_2 o F_1 a seconda del caso. Si ha quindi la tesi. □

Osservazione 6.3.8: In generale un sottospazio lineare chiuso di uno spazio di Banach può non avere un addendo diretto.

Corollario 6.3.9: *Sia H uno spazio di Hilbert ed $F \subset H$ un suo sottospazio lineare chiuso, allora*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

In particolare in uno spazio di Hilbert ogni sottospazio lineare chiuso ammette un addendo diretto.

Dimostrazione. Segue dai Teoremi 2.2.11 e 2.3.8 e dalla Proposizione 6.3.7. □

Teorema 6.3.10 (di Lindenstrauss-Tzafiri): *Se $(X, \|.\|)$ è uno spazio di Banach t.c. $\forall F \subset X$ sottospazio lineare chiuso $\exists F' \subset X$ sottospazio lineare chiuso t.c. $X = F \oplus F'$, allora X ammette una norma hilbertiana equivalente, ossia ammette una norma equivalente che è indotta da un prodotto scalare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o hermitiano se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ su X.*

Dimostrazione. Non trattata. □

Proposizione 6.3.11: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach. Per $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ sono equivalenti*

(1) T è un inversa destra;

(2) T è iniettivo e $\mathrm{Ran}(T)$ è un addendo diretto topologico.

e per $S \in \mathrm{L}(Y, X)$ sono equivalenti

(1) S è un inversa sinistra;

(2) S è surgettiva e $\mathrm{Ker}(S)$ è addendo diretto topologico.

Dimostrazione. Supponiamo T inversa destra e S inversa sinistra, wlog assumiamo che lo siano l'uno dell'altra, cioè $ST = Id_X$. Allora S è surgettiva e T è iniettiva. Inoltre $P = TS : Y \to Y$ è un proiettore lineare continuo, infatti

$$P^2 = T(ST)S = TS = P$$

e se $y \in Y$ vale $y = Py + (I - P)y$, dunque $Y = \mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$. Ma $\mathrm{Ran}(P) = \mathrm{Ran}(TS) = \mathrm{Ran}(T)$ (S surgettiva), mentre $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(TS) = \mathrm{Ker}(S)$ (T iniettiva), dunque $Y = \mathrm{Ran}(T) \oplus \mathrm{Ker}(S)$. Quindi (1) $\Rightarrow$ (2).

Viceversa sia $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ iniettivo con $\mathrm{Ran}(T) \oplus F_2 = Y$ e sia $p_1 : Y \to \mathrm{Ran}(T)$ la proiezione sulla prima componente. Allora $T : X \to \mathrm{Ran}(T)$ è invertibile con inversa continua per il Corollario 6.3.2 ($\mathrm{Ran}(T)$ è chiuso in Y completo, allora è anch'esso completo) e posso quindi definire $S = T^{-1} \circ p_1 : Y \to X$ che verifica $ST = Id_Y$. Sia invece adesso $S \in \mathrm{L}(Y, X)$ surgettivo con $F_1 \oplus \mathrm{Ker}(S) = Y$ e sia $i_1 : F_1 \hookrightarrow Y$ l'inclusione, allora $S_{|F_1} : F_1 \to X$ è iniettivo (ho tolto $\mathrm{Ker}(S)$), quindi è invertibile con inversa continua per il Corollario 6.3.2 e definendo $T = i_1 \circ (S_{|F_1})^{-1} : X \to Y$ si ha $ST = Id_X$. □

6.4 Surgettività di Operatori Lineari, Pre-annullatore e Teorema dell'Immagine Chiusa

Nel seguito di questa sezione tutti gli spazi vettoriali saranno su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Lemma 6.4.1 (di iterazione): *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach, $L \in \mathrm{L}(X, Y)$, $U \subset Y$ limitato e $t \in (0, 1)$. Se $U \subset L(\overline{B}_X) + tU$ allora $(1 - t)U \subset L(\overline{B}_X)$. In particolare se U è assorbente allora L è surgettiva. E se U è intorno di $0 \in Y$ allora L è surgettiva e aperta.*

Dimostrazione. Sia $u_0 \in U$, allora esistono $x_0 \in \overline{B}_X$ e $u_1 \in U$ t.c.

$$u_0 = Lx_0 + tu_1$$

iterando si ottiene

$$u_0 = L\left(\sum_{k=0}^{n} t^k x_k\right) + t^{n+1} u_{n+1}$$

con gli $x_k \in \overline{B}_X \ \ \forall k = 1, ..., n$ e $u_{n+1} \in U$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$. Ma essendo U limitato e $t \in (0,1)$ vale $t^{n+1}u_{n+1} \to 0 \in Y$ per $n \to +\infty$, mentre

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|t^k x_k\|_X \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k = \frac{1}{1-t}$$

ossia $\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k x_k$ converge normalmente ed X è completo, quindi esiste un $\hat{x} \in X$ t.c.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k x_x = \hat{x}$$

e $\|\hat{x}\| \leq \frac{1}{1-t}$, dunque

$$u_0 = L\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} t^k x_k\right) = L\hat{x} \in L\left(\frac{1}{1-t}\overline{B}_X\right)$$

ossia $U \subset L\left(\frac{1}{1-t}\overline{B}_X\right)$, da cui segue la prima parte dell'enunciato.

Vediamo adesso la surgettività nel caso di U assorbente. Sia $y \in Y$, allora esiste un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $y \in nU$, ma $nU \subset nL\left(\frac{1}{1-t}\overline{B}_X\right) = L\left(\frac{n}{1-t}\overline{B}_X\right) \subset \mathrm{Ran}(L)$, da cui la tesi per l'arbitrarietà di $y \in Y$.

Per l'ultima parte basta notare che un intorno di 0 in uno SVT è automaticamente assorbente, da cui segue la surgettività per quanto provato precedentemente. Inoltre vale $U \subset L\left(\frac{1}{1-t}\overline{B}_X\right) \subset L(nB_X)$, cioè $n^{-1}U \subset L(B_X)$ con $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, che conclude la dimostrazione. □

I seguenti importanti teoremi sono entrambi proprietà di surgettività.

Teorema 6.4.2 (di estensione di Tietze): *Siano (M,d) spazio metrico, $(E, \|.\|)$ spazio di Banach, $A \subset M$ chiuso ed $f : A \to E$ continua e limitata. Allora esiste $\widetilde{f} : M \to E$ continua che estende f e con $\|\widetilde{f}\|_{\infty,M} = \|f\|_{\infty,A}$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore di restrizione

$$\rho_A : C_b(M,E) \to C_b(A,E)$$

t.c. $\rho_A(f) = f_{|A} \ \ \forall f \in C_b(M,E)$. Vogliamo provare che è surgettivo. Proviamo le ipotesi del Lemma 6.4.1 di iterazione per concludere la surgettività di ρ_A, in particolare data $f \in C_b(A,E)$ con $\|f\|_{\infty,A} \leq 1$ troveremo una $g \in C_b(M,E)$ con $\|g\|_{\infty,M} \leq 1$ e t.c. $\|f - g_{|A}\|_{\infty,A} \leq \frac{1}{2}$, ossia si prova che

$$\overline{B}_{C_b(A,E)} \subset \rho_A\left(\overline{B}_{C_b(M,E)}\right) + \frac{1}{2}\overline{B}_{C_b(A,E)}.$$

Sia allora $f \in C_b(A,E)$ con $\|f\|_{\infty,A} \leq 1$, per ogni $a \in A \ \ \exists U_a \subset A$ intorno aperto di a in A t.c.

$$\|f(a) - f(x)\|_E < \frac{1}{2} \ \ \forall x \in U_a.$$

Sia $U_A = A^c$ aperto, allora $\{U_i\}_{i\in A\cup\{A\}}$ è un ricoprimento aperto di M di cui posso prenderne una partizione dell'unità subordinata $\{\varphi_i\}_{i\in A\cup\{A\}}$. Definiamo

$$g(x) = \sum_{a\in A} \varphi_a(x) f(a)$$

allora $g : M \to E$ è continua e vale $\|g\|_{\infty,M} \leq \|f\|_{\infty,A} \leq 1$. Infine per ogni $b \in A$, se $I = A \cup \{A\}$, definendo formalmente $f(A) = 0$, vale

$$g(b) - f(b) = \sum_{a\in I} \varphi_a(b) f(a) - f(b) \sum_{a\in I} \varphi_a(b) = \sum_{a\in I} \varphi_a(b)(f(a) - f(b))$$

e quindi

$$\|g(b)-f(b)\|_E \leq \sum_{a\in I}\varphi_a(b)\|f(a)-f(b)\|_E = \sum_{\substack{a\in I\\ b\in \mathrm{supp}(\varphi_a)\subset U_a}}\varphi_a(b)\|f(a)-f(b)\|_E \leq \frac{1}{2}\sum_{a\in I}\varphi_a(b) = \frac{1}{2}$$

da cui segue $\|f - g_{|A}\|_{\infty,A} \leq \frac{1}{2}$. □

Teorema 6.4.3 (di sollevamento lineare): *Siano $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ spazi di Banach, (M, d) spazio metrico, $T \in \mathrm{L}(E, F)$ surgettivo e $f : M \to F$ continua. Allora esiste $\widetilde{f} : M \to E$ t.c. $T \circ \widetilde{f} = f$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore di composizione

$$T_* : C_b(M, E) \to C_b(M, F)$$

t.c. $T_*(g) = T \circ g \ \ \forall g \in C_b(M, E)$. Vogliamo provare che è surgettivo. Proviamo le ipotesi del Lemma 6.4.1 di iterazione per concludere la surgettività di T_*. Per il Teorema 6.3.1 della mappa aperta T è aperto e quindi esiste un $R > 0$ t.c. $T(R\overline{B}_E) = RT(\overline{B}_E) \supset \overline{B}_F$. Dimostreremo che presa $f \in C_b(M, F)$ con $\|f\|_{\infty,M} \leq 1$ esiste una $g \in C_b(M, E)$ con $\|g\|_{\infty,M} \leq R$ e t.c. $\|f - T \circ g\|_{\infty,M} \leq \frac{1}{2}$, ossia si prova che

$$\overline{B}_{C_b(M,F)} \subset T(R\overline{B}_{C_b(M,E)}) + \frac{1}{2}\overline{B}_{C_b(M,F)}.$$

Prendiamo quindi $f \in C_b(M, F)$ con $\|f\|_{\infty,M} \leq 1$. Abbiamo $T(R\overline{B}_E) \supset \overline{B}_F$, allora $\forall a \in M \ \ \exists g_a \in E$ t.c. $Tg_a = f(a)$ con $\|g_a\|_E \leq R\|f(a)\|_F$ ed inoltre $\forall a \in M \ \ \exists U_a \subset M$ intorno aperto di a t.c.

$$\|Tg_a - f(x)\|_F \leq \frac{1}{2} \ \ \forall x \in U_a.$$

Prendiamo una partizione dell'unità $\{\varphi_a\}_{a\in M}$ subordinata al ricoprimento aperto di M $\{U_a\}_{a\in M}$. Definiamo

$$g(x) = \sum_{a\in M}\varphi_a(x)g_a$$

allora $g : M \to E$ e $\forall x \in M$ vale $\|g(x)\|_E \leq R\|f\|_{\infty,M} = R$, dunque $\|g\|_{\infty,M} \leq R$. Infine in modo molto simile al teorema precedente si dimostra anche che

$$\|T \circ g - f\|_{\infty,M} \leq \frac{1}{2}.$$

□

Definizione 6.4.4: Siano $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ spazi normati, un operatore $L \in \mathrm{L}(E, F)$ è detto *fortemente iniettivo* se vale

$$\|Lx\|_F \geq K\|x\|_E \ \ \forall x \in E$$

per un qualche $K > 0$.

Proposizione 6.4.5: *Siano $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ spazi di Banach ed $L \in \mathrm{L}(E, F)$. Allora sono equivalenti:*

(1) L è fortemente iniettivo;

(2) L è iniettivo e $\mathrm{Ran}(L)$ *è chiusa.*

Dimostrazione. Se vale (1) allora $L : E \to \mathrm{Ran}(L)$ è iniettiva ed è omeomorfismo lineare in quanto l'inversa è continua per la condizione di forte iniettività. Ma E è completo, dunque anche $\mathrm{Ran}(L)$ è completo (L è un omeomorfismo lineare tra E e $\mathrm{Ran}(L)$) e quindi è in particolare chiuso. Viceversa se vale (2) vale che $L : E \to \mathrm{Ran}(L)$ è omeomorfismo lineare sempre per il Corollario 6.3.2, da cui segue quanto voluto con $K = \|L^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$. □

Lemma 6.4.6: *Siano $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ e $T^* \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ il suo operatore aggiunto. Se T^* è fortemente iniettivo allora T è surgettivo.*

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità $K = 1$. Sia $t \in (0, 1)$, dico che $B_Y \subset T(\overline{B}_X) + tB_Y$ da cui segue la surgettività grazie al Lemma 6.4.1 di iterazione.

Supponiamo per assurdo che esista un $y_0 \in B_Y$ t.c. $y_0 \notin T(\overline{B}_X)+tB_Y$. Notiamo che $T(\overline{B}_X)+tB_Y$ è convesso aperto perché è somma di convessi di cui il secondo aperto, quindi posso utilizzare il Teorema 4.3.3 di Hahn-Banach prima forma geometrica (il singleton $\{y_0\}$ è banalmente convesso) per dire che $\exists y_0^* \in Y^*$ t.c.

$$\langle y_0^*, Tx - ty\rangle < \langle y_0^*, y_0\rangle \;\; \forall x \in \overline{B}_X \;\; \forall y \in B_Y$$

in paticolare vale per $y = y_0$ che ci fa ottenere

$$(1 - t)\langle y_0^*, y_0\rangle > \langle y_0^*, Tx\rangle = \langle T^* y_0^*, x\rangle \;\; \forall x \in \overline{B}_X$$

e prendendo il $\sup_{x\in\overline{B}_X}$ si ottiene

$$\|T^* y_0^*\|_{X^*} \leq (1 - t)\langle y_0^*, y_0\rangle \leq (1 - t)\|y_0^*\|_{Y^*} < \|y_0^*\|_{Y^*}$$

ossia $\|T^*\|_{\mathrm{op}} < 1$ che è un assurdo, in quanto T^* è fortemente iniettivo con $K = 1$, dunque deve essere $\|T^*\|_{\mathrm{op}} \geq 1$. □

Fissiamo $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Per $A \subset X$ sottospazio lineare abbiamo definito il suo annullatore

$$A^\perp = \{f \in X^* \mid \langle f, x\rangle = 0 \;\; \forall x \in A\} \subset X^*$$

che è w*-chiuso. Possiamo definire un concetto "duale" all'annullatore.

Definizione 6.4.7: Sia $B \subset X^*$ sottospazio lineare, definiamo il suo *pre-annullatore*

$$B_\perp = \{x \in X \mid \langle f, x\rangle = 0 \;\; \forall f \in B\} \subset X.$$

Osservazione 6.4.8: Se $B \subset X^*$ sottospazio lineare, il suo pre-annullatore $B_\perp$ è chiuso nella topologia debole di X e vale

$$B_\perp = \Phi^{-1}(B^\perp) \cap X$$

in cui $\Phi : X \hookrightarrow X^{**}$ è l'usuale inclusione per valutazioni.

Osservazione 6.4.9: Vale $B \subset A^\perp \iff A \subset B_\perp \iff \langle b, a\rangle = 0 \;\; \forall a \in A \;\; \forall b \in B$. In particolare $A \subset {A^\perp}_\perp$ e quindi anche $\overline{A} \subset {A^\perp}_\perp$, in quanto in uno spazio di Banach vale convesso e chiuso se e solo se convesso e w-chiuso (Proposizione 5.2.19).

Proposizione 6.4.10: *Sia $A \subset X$ sottospazio lineare. Allora $\overline{A} = {A^{\perp}}_{\perp}$.*

Dimostrazione. Abbiamo detto nell'Osservazione precedente che vale il contenimento $\overline{A} \subset {A^{\perp}}_{\perp}$. Se invece $x \notin \overline{A}$ per il Corollario 4.3.6 esiste un $f \in X^*$ t.c. $\langle f, x\rangle \neq 0$ e $f_{|A} = 0$, ossia t.c. $f \in A^{\perp}$ e $\langle f, x\rangle \neq 0$, cioè $x \notin {A^{\perp}}_{\perp}$, dunque si ha anche l'altra inclusione. □

Proposizione 6.4.11: *Sia $B \subset X^*$ sottospazio lineare. Allora $\overline{B}^{w*} = {B_{\perp}}^{\perp}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che ${B_{\perp}}^{\perp}$ è w*-chiuso, dunque da $B \subset {B_{\perp}}^{\perp}$ segue $\overline{B}^{w*} \subset {B_{\perp}}^{\perp}$. Se $f \notin \overline{B}^{w*}$, per il Corollario 4.3.6 esiste $\phi : X^* \to \mathbb{K}$ lineare e w*-continuo t.c. $\langle \phi, f\rangle \neq 0$ e $\phi_{|\overline{B}^{w*}} = 0$, allora $\phi \in B_{\perp}$ e $\langle \phi, f\rangle \neq 0$, cioè $f \notin {B_{\perp}}^{\perp}$, dunque si ha anche l'altra inclusione. □

Lemma 6.4.12: *Siano $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Allora vale*

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ran}(T^*)_{\perp}$*;*

(2) $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ran}(T)^{\perp}$.

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Si ha $x \in \mathrm{Ker}(T)$ se e solo se $Tx = 0$ e per il Corollario 4.1.6 questo equivale a $\langle f, Tx\rangle = 0\ \ \forall f \in X^*$, ma questo vale se e solo se $\langle T^* f, x\rangle = 0\ \ \forall f \in X^*$, ossia se e solo se $x \in \mathrm{Ran}(T^*)_{\perp}$.

Per (2) è totalmente analogo in quanto $f \in \mathrm{Ker}(T^*)$ se e solo se $T^* f = 0$ e questo equivale a $\langle T^* f, x\rangle = 0\ \ \forall x \in X$, ossia se e solo se $\langle f, Tx\rangle = 0\ \ \forall x \in X$, cioè se e solo se $f \in \mathrm{Ran}(T)^{\perp}$. □

Corollario 6.4.13: *Siano $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Allora vale*

(1) $\mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}(T^*)}^{w*}$*;*

(2) $\mathrm{Ker}(T^*)_{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}(T)}$.

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 6.4.11 possiamo scrivere

$$\overline{\mathrm{Ran}(T^*)}^{w*} = {\mathrm{Ran}(T^*)_{\perp}}^{\perp} = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$$

e grazie alla Proposizione 6.4.10 possiamo scrivere

$$\overline{\mathrm{Ran}(T)} = {\mathrm{Ran}(T)^{\perp}}_{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*)_{\perp}$$

□

Proposizione 6.4.14: *Siano $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Allora vale*

(1) T è iniettivo $\iff$ T^* ha immagine w-densa;*

(2) T^* è iniettivo $\iff$ T ha immagine densa $\iff$ T ha immagine w-densa.

Dimostrazione. Segue dal Corollario precedente e l'ultima equivalenza di (2) segue dalla Proposizione 5.2.19. □

Teorema 6.4.15 (dell'immagine chiusa): *Siano $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Allora sono equivalenti*

(1) $\mathrm{Ran}(T)$ *è chiusa;*

(2) $\mathrm{Ran}(T)$ *è w-chiusa;*

(3) $\mathrm{Ran}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)_\perp$*;*

(4) $\mathrm{Ran}(T^*)$ *è chiusa;*

(5) $\mathrm{Ran}(T^*)$ *è w*-chiusa;*

(6) $\mathrm{Ran}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

Dimostrazione. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) Segue dalla Proposizione 5.2.19.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) Abbiamo dimostrato nel Corollario precedente che $\mathrm{Ker}(T^*)_\perp = \overline{\mathrm{Ran}(T)}$. Dunque se vale (2) allora vale (1) (provato prima) e quindi segue (3). Se vale (3) allora $\overline{\mathrm{Ran}(T)} = \mathrm{Ran}(T)$, dunque si ottiene (1) che equivale a (2).

(5) $\Rightarrow$ (4). Segue dal fatto che la topologia debole* è meno fine di quella forte.

(5) $\Longleftrightarrow$ (6). Abbiamo dimostrato nel Corollario precedente che $\mathrm{Ker}(T)^\perp = \overline{\mathrm{Ran}(T^*)}^{w*}$, dunque se vale (5) allora $\overline{\mathrm{Ran}(T^*)}^{w*} = \mathrm{Ran}(T^*)$ e si ha (6). Se invece vale (6) si ottiene $\overline{\mathrm{Ran}(T^*)}^{w*} = \mathrm{Ker}(T)^\perp = \mathrm{Ran}(T^*)$, cioè (5).

(4) $\Rightarrow$ (1) Sia $\mathrm{Ran}(T^*)$ chiuso. Sia $Z = \overline{\mathrm{Ran}(T)}$. L'operatore T si fattorizza con j, inclusione di Z in Y, come $T = j \circ S$

$$X \xrightarrow{S} Z \xrightarrow{j} Y$$

e da questo si dedue una fattorizzazione anche per $T^* = S^* \circ j^*$

$$Y^* \xrightarrow{j^*} Z^* \xrightarrow{S^*} X^*.$$

Ora S ha immagine densa in quanto $\mathrm{Ran}(S) = \mathrm{Ran}(T)$ e quindi $\overline{\mathrm{Ran}(S)} = \overline{\mathrm{Ran}(T)} = Z$. Di conseguenza, grazie alla Proposizione precedente si ottiene che S^* è iniettivo. Inoltre per il Teorema 4.1.1 di Hahn-Banach vale che j^* è surgettivo (j^* è la mappa di restrizione a Z), quindi $\mathrm{Ran}(S^*) = \mathrm{Ran}(T^*)$ che è chiusa per ipotesi. Dunque S^* è iniettiva con $\mathrm{Ran}(S^*)$ chiuso, quindi S^* è fortemente iniettiva e grazie al Lemma 6.4.6 si ottiene la surgettività di S da cui segue

$$Z = \overline{\mathrm{Ran}(T)} = \mathrm{Ran}(S) = \mathrm{Ran}(T)$$

che implica (1).

(1) $\Rightarrow$ (6) Supponiamo valga (1), vogliamo provare che $\mathrm{Ran}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$. Osserviamo che vale sempre $\mathrm{Ran}(T^*) \subset \mathrm{Ker}(T)^\perp$. Sia $x^* \in \mathrm{Ker}(T)^\perp \subset X^*$, allora $\mathrm{Ker}(x^*) \supset \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(\pi)$ con $\pi : X \to X/\mathrm{Ker}(T)$ la proiezione al quoziente. Dunque x^* si fattorizza con π come $x^* = \tilde{x}^* \circ \pi$

$$X \xrightarrow{\pi} X/\mathrm{Ker}(T) \xrightarrow{\tilde{x}^*} \mathbb{K}.$$

Consideriamo il trasporto al quoziente $\tilde{T} : X/\mathrm{Ker}(T) \to Y$ di T, essendo $\mathrm{Ran}(T) = \mathrm{Ran}(\tilde{T})$ chiuso, per il Corollario 6.3.2, $\tilde{T} : X/\mathrm{Ker}(T) \to \mathrm{Ran}(\tilde{T})$ è invertibile con inversa continua. Di conseguenza $x^* \circ \tilde{T}^{-1} : \mathrm{Ran}(\tilde{T}) \to \mathbb{K}$ è lineare e continua e si estende quindi per il Corollario 4.1.2 (o il Corollario 4.1.3) ad un $y^* \in Y^*$. Ma allora $\tilde{x}^* = y^* \circ \tilde{T}$ e quindi $x^* = \tilde{x}^* \circ \pi = y^* \circ \tilde{T} \circ \pi = y^* \circ T = T^* y^*$, cioè $x^* \in \mathrm{Ran}(T^*)$. Quindi $\mathrm{Ker}(T)^\perp \subset \mathrm{Ran}(T^*)$. □

A questo punto è possibile completare il criterio di surgettività via aggiunto avviato con il Lemma 6.4.6.

Proposizione 6.4.16 (Criterio di surgettività via aggiunto): *Siano* $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *spazi di Banach e* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Allora sono equivalenti*

(1) T è surgettivo;

(2) T^* è fortemente iniettivo;

(3) T^* è iniettivo e $\mathrm{Ran}(T^*)$ *è chiusa.*

Dimostrazione. Nella Proposizione 6.4.5 abbiamo dimostrato l'equivalenza tra (2) e (3). Vediamo adesso l'equivalenza tra (3) e (1). Grazie al Corollario 6.4.13 ed al Teorema 6.4.15 dell'immagine chiusa segue

$$\begin{aligned} T^* \text{ iniettivo } &\iff \mathrm{Ran}(T) \text{ densa} \\ \mathrm{Ran}(T^*) \text{ chiusa } &\iff \mathrm{Ran}(T) \text{ chiusa} \end{aligned}$$

e gli ultimi due fatti insieme equivalgono a dire $\mathrm{Ran}(T) = Y$. □

Proposizione 6.4.17 (Criterio di surgettività per l'aggiunto): *Siano $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ e $T^* \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ il suo operatore aggiunto. Allora sono equivalenti*

(1) T^* è surgettivo;

(2) T è fortemente iniettivo;

(3) T è iniettivo e $\mathrm{Ran}(T)$ *è chiusa.*

Dimostrazione. Nella Proposizione 6.4.5 abbiamo dimostrato l'equivalenza tra (2) e (3). Vediamo adesso l'equivalenza tra (3) e (1). Grazie al Corollario 6.4.13 ed al Teorema 6.4.15 dell'immagine chiusa segue

$$\begin{aligned} T \text{ iniettivo } &\iff \mathrm{Ran}(T^*) \text{ w*-densa} \\ \mathrm{Ran}(T) \text{ chiusa } &\iff \mathrm{Ran}(T^*) \text{ w*-chiusa} \end{aligned}$$

e gli ultimi due fatti insieme equivalgono a dire $\mathrm{Ran}(T^*) = X^*$. □

7

Topologia per l'Analisi Funzionale, seconda parte

7.1 Riflessività e Uniforme Convessità

In tutto il resto della sezione, dato uno spazio normato $(E, \|.\|)$, denoteremo con

$$\Phi_E : E \hookrightarrow E^{**}$$

la sua immersione canonica per valutazioni nel biduale.

Definizione 7.1.1: Uno spazio normato $(X, \|.\|)$ è *riflessivo* se la sua immersione canonica nel biduale Φ_X è surgettiva (e quindi bigettiva).

Teorema 7.1.2: *Ogni spazio di Hilbert reale o complesso è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia H spazio di Hilbert (reale o complesso) con prodotto $(. \cdot .)$. Per il Teorema 2.4.2 di Rappresentazione di Riesz c'è un'isometria tra H ed H^* che associa ad ogni $f \in H^*$ un vettore $x_f \in H$ t.c. $\langle f, x\rangle = (x \cdot x_f) \ \ \forall x \in H$. Dunque possiamo canonicamente dotare H^* di una sua struttura di spazio di Hilbert definendovi il prodotto

$$(f \cdot g)_* = (x_f \cdot x_g) \ \ \forall f, g \in H^*.$$

Di conseguenza anche per H^* ed H^{**} si applica il Teorema 2.4.2 di rappresentazione di Riesz. Abbiamo quindi due isometrie

$$\begin{aligned} J_1 &: H \longrightarrow H^* \\ J_2 &: H^* \longrightarrow H^{**} \end{aligned}$$

t.c. per ogni $x \in H$ ed ogni $g \in H^*$

$$\begin{aligned} &\langle J_1(x), v\rangle = (v \cdot x) \ \ \forall v \in H \\ &\langle J_2(f), g\rangle = (g \cdot f)_* = (x_g \cdot x_f) = \langle f, x_g\rangle \ \ \forall g \in H^* \end{aligned} \tag{7.1}$$

quindi

$$\langle (J_2 \circ J_1)(x), f\rangle = \langle J_1(x), x_f\rangle = (x \cdot x_f) = \langle f, x\rangle \ \ \forall f \in H^* \ \ \forall x \in H$$

ossia effettivamente $J_2 \circ J_1 = \Phi_H$, da cui segue quanto voluto perché J_1 e J_2 sono entrambe bigettive. □

Fissiamo adesso $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 7.1.3: *Lo spazio di Banach* $(X, \|.\|)$ *è riflessivo se e solo se lo è il suo spazio duale* $(X^*, \|.\|_{X^*})$.

Dimostrazione. Si ha la seguente catena

$$X^* \xrightarrow{\Phi_{X^*}} X^{***} \xrightarrow{(\Phi_X)^*} X^*.$$

Se Φ_X è surgettivo allora è omeomorfismo lineare (Corollario 6.3.2 del Teorema della mappa aperta) e quindi lo è anche $(\Phi_X)^*$ (Corollario 4.2.6). Ma allora essendo $(\Phi_X)^* \circ \Phi_{X^*} = Id_{X^*}$ (verifica non difficile) si ha che anche Φ_{X^*} è omeomorfismo lineare e quindi, in particolare, surgettivo. Viceversa se Φ_{X^*} è surgettiva allora è omeomorfismo lineare (Corollario 6.3.2) e quindi lo è anche $(\Phi_X)^*$ (sempre perché $(\Phi_X)^* \circ \Phi_{X^*} = Id_{X^*}$). Ma allora $(\Phi_X)^*$ è iniettiva e con immagine chiusa, dunque per il criterio di surgettività via aggiunto, Proposizione 6.4.16, Φ_X è surgettivo e quindi omeomorifsmo lineare (Corollario 6.3.2). □

Teorema 7.1.4 (di Kakutani): *Lo spazio di Banach* $(X, \|.\|)$ *è riflessivo se e solo se* $\overline{B}_X$ *è w-compatta.*

Dimostrazione. Teniamo a mente l'Osservazione 5.2.7.

Supponiamo X riflessivo, allora $\Phi_X(\overline{B}_X) = \overline{B}_{X^{**}}$ (Φ_X è isometria nel caso riflessivo). Ma per il Teorema 5.3.4 di Banach-Alaoglu la palla $\overline{B}_{X^{**}}$ è compatta nello spazio $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$, ma Φ_X è un omeomorfismo linere tra $(X, \sigma(X, X^*))$ e $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$, dunque $\overline{B}_X = \Phi_X^{-1}(\overline{B}_{X^{**}})$ è w-compatta.

Viceversa supponiamo $\overline{B}_X$ è w-compatta in X. Osserviamo che la mappa

$$\Phi_X : (X, \sigma(X, X^*)) \to (\Phi_X(X), \sigma(X^{**}, X^*)_{|\Phi_X(X)}) \subset (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$$

è omeomorfismo lineare. Ma allora per continuità si ha che $\Phi_X(\overline{B}_X)$ è w*-compatta in X^{**} ed in particolare è w*-chiusa in X^{**} (la topologia debole* è T2). Per il Teorema 5.3.5 di Goldstine $\Phi_X(\overline{B}_X)$ è w*-densa in $\overline{B}_{X^{**}}$, dunque deve essere $\Phi_X(\overline{B}_X) = \overline{B}_{X^{**}}$. Da questo, grazie alla linearità di Φ_X, si ottiene facilmente che Φ_X è surgettiva. □

Definizione 7.1.5: Una norma $\|.\|$ su Y spazio vettoriale è *uniformemente convessa* se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ \forall x, y \in \overline{B}_Y \ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq 1 - \delta \implies \|x - y\| \leq \varepsilon$$

Esempio 7.1.6: Per $p \in (1, +\infty)$ le $\|.\|_p$ su $\mathbb{R}^n$ sono uniformemente convesse.

Teorema 7.1.7 (di Milman-Pettis): *Se la norma* $\|.\|$ *è uniformemente convessa, allora lo spazio di Banach* $(X, \|.\|)$ *è riflessivo.*

Dimostrazione. (di Kakutani) Sia $\eta \in X^{**}$ unitario; vogliamo vedere che $\eta \in \Phi_X(X)$. Ora $\forall k \in \mathbb{N}_+$ sia δ_k un numero relativo a $\varepsilon = k^{-1}$ dato dalla Definizione 7.1.5 con $\delta_k \to 0$, senza perdita di generalità possiamo prenderli t.c. $\delta_k \in (0, 1) \ \forall k \in \mathbb{N}_+$. Possiamo trovare $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_+} \subset X^*$ t.c.

$$\begin{cases} \|f_k\|_{X^*} = 1 \\ \langle \eta, f_k \rangle > 1 - \delta_k \end{cases}$$

inoltre prendiamo f_0 arbitraria in X^* e definiamo formalmente $\delta_0 = +\infty$. Per il Teorema 5.3.5 di Goldstine per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ è non vuota la seguente intersezione

$$\Phi_X(\overline{B}_X) \cap \{\theta \in \overline{B}_{X^{**}} \mid \langle \theta - \eta, f_k \rangle < n^{-1} \text{ e } \langle \theta, f_k \rangle > 1 - \delta_k \;\; \forall k = 1, ..., n\}$$

(intorno di η in $\overline{B}_{X^{**}}$ nella topologia $\sigma(X^{**}, X^*)_{|\overline{B}_{X^{**}}}$). Dunque vi è una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \subset \overline{B}_X$ t.c.

$$\begin{cases} |\langle f_k, x_n \rangle - \langle \eta, f_k \rangle| < n^{-1} \\ \langle f_k, x_n \rangle > 1 - \delta_k \end{cases} \qquad \forall k = 0, ..., n \;\; \forall n \in \mathbb{N}_+$$

Allora per ogni $p, q \in \mathbb{N}_+$, $p \leq q$, vale

$$\left\| \frac{x_p + x_q}{2} \right\| \geq \left\langle f_p, \frac{x_p + x_q}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}(\langle f_p, x_p \rangle + \langle f_p, x_q \rangle) > 1 - \delta_p$$

Quindi per la proprietà dei δ_k vale $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{p}$. Ma allora la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ è di Cauchy e converge a un elemento $\tilde{x} \in \overline{B}_X$ che verifica

$$\langle f_k, \tilde{x} \rangle = \langle \eta, f_k \rangle \;\; \forall k \in \mathbb{N}.$$

In particolare la $\tilde{x}$ trovata verifica

$$\langle f_0, \tilde{x} \rangle = \langle \eta, f_0 \rangle$$

ma $f_0 \in X^*$ era arbitrario, dunque $\eta = \mathrm{ev}_{\tilde{x}} \in \Phi_X(X)$. □

Concludiamo con un'importante proprietà degli spazi di Banach con norma uniformemente convessa.

Teorema 7.1.8 (di Radon-Riesz): *Se la norma $\|.\|$ è uniformemente convessa, allora per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ed $x \in X$ sono equivalenti:*

(1) $x_n \longrightarrow x$ *per* $n \longrightarrow +\infty$*;*

(2) $x_n \rightharpoonup x$ *e* $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ *per* $n \longrightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Ovviamente (1) implica (2). Dimostriamo l'implicazione opposta. Se $x = 0$ la conclusione è ovvia, supponiamo quindi $x \neq 0$. Grazie alle ipotesi si ha

$$\max(\|x_n\|, \|x\|)^{-1} x_n \rightharpoonup \|x\|^{-1} x$$

quindi chiamando $y_n = \max(\|x_n\|, \|x\|)^{-1} x_n$ ed $y = \|x\|^{-1} x$ si ha anche

$$\frac{y_n + y}{2} \rightharpoonup y$$

e grazie alla Proposizione 5.2.17 si ottiene

$$1 \leq \liminf_{n \to +\infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq 1$$

di conseguenza $\left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \to 1$ e per uniforme convessità $\|y_n - y\| \to 0$, ma allora anche

$$\left\| \frac{\|x\|}{\max(\|x_n\|, \|x\|)} x_n - x \right\| = \|x\| \|y_n - y\| \to 0$$

dunque

$$\|x_n - x\| \leq \left\| x_n - \frac{\|x\|}{\max(\|x_n\|, \|x\|)} x_n \right\| + \left\| \frac{\|x\|}{\max(\|x_n\|, \|x\|)} x_n - x \right\| \to 0.$$

□

7.2 Separabilità di Spazi di Banach

Sarà ancora $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Inoltre dato S un insieme denoteremo ancora le parti finte di S con $\mathcal{P}_f(S)$.

Lemma 7.2.1: *Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ allora sono equivalenti:*

(1) se $f \in X^*$ è t.c. $\langle f, x_n\rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora necessariamente $f = 0 \in X^*$;

(2) $\mathrm{span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ è denso in X.

Dimostrazione. Sia $Y = \mathrm{span}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ allora (1) equivale a dire $Y^\perp = \{0\}$, dunque dobbiamo dimostrare

$$Y^\perp = \{0\} \iff Y \text{ è denso in } X.$$

Se $Y^\perp = \{0\}$ allora $\overline{Y} = Y^\perp_\perp = X$ (Proposizione 6.4.10). Viceversa se Y è denso in X allora ovviamente $Y^\perp = \{0\}$. □

Teorema 7.2.2: *Valgono le seguenti condizioni:*

(1) $(X^*, \|.\|_{X^*})$ separabile $\implies$ $(X, \|.\|)$ separabile;

(2) $(X, \|.\|)$ è separabile $\iff$ $(\overline{B}_{X^*}, (\tau_{w^*})_{|\overline{B}_{X^*}})$ è metrizzabile,

(3) $(X^*, \|.\|_{X^*})$ è separabile $\iff$ $(\overline{B}_X, (\tau_w)_{|\overline{B}_X})$ è metrizzabile.

Dimostrazione. (1) Se $(X^*, \|.\|_{X^*})$ è separabile, allora esiste $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tale che $\overline{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = X^*$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in X$ tale che

$$\begin{cases} |\langle f_n, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{X^*} \\ \|x_n\| = 1 \end{cases}.$$

Dimostriamo che $\overline{\mathrm{span}}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = X$ utilizzando il Lemma 7.2.1. Sia $f \in X^*$ t.c. $\langle f, x_n\rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ una successione t.c. $\|f_{n_j} - f\|_{X^*} \to 0$ (esiste perché $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in X^*). Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|f_{n_j}\|_{X^*} &\leq |\langle f_{n_j}, x_{n_j}\rangle| \leq |\langle f_{n_j} - f, x_{n_j}\rangle| + |\langle f, x_{n_j}\rangle| \\ &= |\langle f_{n_j} - f, x_{n_j}\rangle| \leq \|f_{n_j} - f\|_{X^*} = o(1) \ \text{ per } j \to +\infty \end{aligned}$$

dunque $f = 0 \in X^*$.

(2) Che X separabile implichi $(\overline{B}_{X^*}, (\tau_{w^*})_{|\overline{B}_{X^*}})$ metrizzabile, si è già visto (Proposizione 5.2.18).

Dimostriamo il viceversa. Supponiamo $(\overline{B}_{X^*}, (\tau_{w^*})_{|\overline{B}_{X^*}})$ metrizzabile. Sia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(X)$ t.c.

$$2F_n \subset F_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e t.c. $\{F_n^\circ \cap \overline{B}_{X^*}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia un sistema fondamentale di intorni dell'origine dello spazio $(\overline{B}_{X^*}, (\tau_{w^*})_{|\overline{B}_{X^*}})$ (tali $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esistono per la metrizzabilità dell'ipotesi, infatti basta prendere il sistema fondamentale di intorni delle palle $\{B(0, 2^{-n})\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\overline{B}_{X^*})$ nella metrica che topologizza $(\overline{B}_{X^*}, (\tau_{w^*})_{|\overline{B}_{X^*}})$ ed essendo τ_{w^*} la topologia polare associata a $\mathcal{P}_f(X)$ e per questo $\{F^\circ\}_{F\in\mathcal{P}_f(X)}$ forma una base locale di intorni dell'origine di X^*, di conseguenza si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'esistenza di un $F_n \in \mathscr{P}_f(X)$ t.c. $F_n^\circ \cap \overline{B}_{X^*} \subset B(0, 2^{-n})$, allora $\{F_n^\circ\}_{n\in\mathbb{N}}$ è a sua volta un sistema fondamentale di intorni di $0 \in X^*$ e, a meno di aggiungere $2F_n$ a F_{n+1}, possiamo supporre $2F_n \subset F_{n+1}$, infatti aggiungendo punti il polare si rimpicciolisce soltanto e questo non crea problemi).

Consideriamo

$$Y = \operatorname{span}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$$

ed osserviamo che è un sottospazio lineare separabile di X ($\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è numerabile), vediamo che è denso in X. Essendo $\{F_n^\circ \cap \overline{B}_{X^*}\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni dell'origine abbiamo

$$\begin{aligned}
\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F_n^\circ \cap \overline{B}_{X^*}) &= \left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ\right] \cap \overline{B}_{X^*} \\
&= \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right]^\circ \cap \overline{B}_{X^*} \\
&= \left[\operatorname{co}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)\right]^\circ \cap \overline{B}_{X^*} \\
&= \left[\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)\right]^\circ \cap \overline{B}_{X^*} \\
&= Y^\circ \cap \overline{B}_{X^*} = Y^\perp \cap \overline{B}_{X^*} = \{0\}
\end{aligned}$$

e quindi $Y^\perp = \{0\}$ ($Y^\perp$ è un sottospazio lineare), ma allora $\overline{Y} = {Y^\perp}_\perp = X$ (Proposizione 6.4.10) (osserviamo che per il passagio dalla terza riga alla quarta nell'ultima equazione abbiamo usato il fatto $F_n \subset 2^{-1}F_{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$).

(3) Se X^* è separabile, $\overline{B}_{X^{**}}$ è metrizzabile con la topologia indotta da $\sigma(X^{**}, X^*)$ (per il punto (2)). Per l'Osservazione 5.2.7, la topologia debole $\sigma(X, X^*)$ su X è in corrispondenza con quella indotta da $\sigma(X^{**}, X^*)$ su $\Phi_X(X)$. Ma $\Phi_X(\overline{B}_X) = \overline{B}_{X^{**}} \cap \Phi_X(X)$ (Φ_X è isometria con le norme), dunque $\Phi_X(\overline{B}_X)$ è metrizzabile e quindi lo è anche $\overline{B}_X$ (in quanto per l'Osservazione 5.2.7 Φ_X è un omeomorfismo tra questi due spazi).

Viceversa supponiamo $(\overline{B}_X, (\tau_w)_{|\overline{B}_X})$ metrizzabile. Consideriamo $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}_f(X^*)$ t.c. $\{F_n^\circ \cap \Phi_X(\overline{B}_X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia un sistema fondamentale di intorni dell'origine dello spazio $(\Phi_X(\overline{B}_X), \sigma(X^{**}, X^*)_{|\Phi_X(\overline{B}_X)}$ (ricordiamo che la topologia debole* su X^{**} è la topologia polare associata alla famiglia $\mathscr{A} = \mathscr{P}_f(X^*)$ e per questo $\{F^\circ\}_{F\in\mathscr{P}_f(X^*)}$ forma una base locale di intorni dell'origine di X^{**}). Prendiamo

$$Z = \overline{\operatorname{span}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \subset X^*$$

e notiamo che Z è chiuso (nella topologia della norma di X^*) e separabile ($\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è numerabile). Vogliamo provare che $Z = X^*$, da cui seguirebbe la tesi. Supponiamo per assurdo che esista $g \in X^* \setminus Z$, allora per la Proposizione 4.1.7 esiste una $\phi \in X^{**}$ t.c.

$$\begin{cases} \|\phi\|_{X^{**}} = 1 \\ \operatorname{Ker}(\phi) \supset Z \\ \langle \phi, g\rangle = \operatorname{dist}(g, Z) \end{cases}$$

inoltre senza perdere di generalità possiamo supporre $\mathrm{dist}(g, Z) = 1$ (in quanto Z è un sottospazio lineare di X^*). Osserviamo che $\mathrm{Ker}(\phi) \supset Z \iff \phi \in Z^\perp$. Siccome

$$V = \left\{ x \in \overline{B}_X \mid |\langle g, x \rangle| < \frac{1}{2} \right\}$$

è un intorno di $0 \in X$ in $(\overline{B}_X, (\tau_w)_{|\overline{B}_X})$, vi è necessariamente un $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\Phi_X^{-1}\left(F_n^\circ \cap \Phi_X(\overline{B}_X)\right) \subset V$$

(in quanto questi formavano una base locale di intorni dell'origine di X^{**} e $\Phi_X(V)$ è intorno dell'origine di X^{**}) ossia

$$\Phi_X^{-1}(F_n^\circ) \cap \overline{B}_X \subset V = \left\{ x \in \overline{B}_X \mid |\langle g, x \rangle| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Consideriamo adesso l'insieme

$$U = \{\eta \in \overline{B}_{X^{**}} \mid |\langle \eta, g \rangle| > \frac{1}{2} \text{ e } |\langle \eta, f \rangle| < 1 \ \forall f \in F_n\} \ni \phi$$

che è un intorno di ϕ in $(\overline{B}_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*)_{|\overline{B}_{X^{**}}})$ ($\phi \in U$ in quanto $\phi \in Z^\perp$, dunque $\langle \phi, f \rangle = 0$ per ogni $f \in Z \supset F_n$, ed inoltre $\langle \phi, g \rangle = 1 > \frac{1}{2}$), ma per il Teorema 5.3.5 di Goldstine $\Phi_X(\overline{B}_X)$ è denso in $(\overline{B}_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*)_{|\overline{B}_{X^{**}}})$, quindi in particolare interseca U, ossia

$$\exists \mathrm{ev}_x \in \Phi_X(\overline{B}_X) \ \text{ t.c. } \ |\langle \mathrm{ev}_x, g \rangle| > \frac{1}{2}, \ \ |\langle \mathrm{ev}_x, f \rangle| < 1 \ \ \forall f \in F_n$$

che equivale a dire

$$\exists x \in \overline{B}_X \ \text{ t.c. } \ |\langle g, x \rangle| > \frac{1}{2}, \ \ |\langle f, x \rangle| < 1 \ \ \forall f \in F_n$$

e la seconda condizione sulle $f \in F_n$ implica che $x \in \Phi_X^{-1}(F_n^\circ) \cap \overline{B}_X \subset V$ e quindi $|\langle g, x \rangle| < \frac{1}{2}$, che è un assurdo per la scelta di x.

□

Osservazione 7.2.3: Il viceversa del punto (1) del Teorema precedente è falso.
Ad esempio ℓ^1 è separabile ma il suo duale che è linearmente isometrico ad ℓ^∞ non lo è.

Corollario 7.2.4: *Lo spazio $(X, \|.\|)$ è riflessivo e separabile se e solo se lo è $(X^*, \|.\|_{X^*})$.*

Dimostrazione. Se $(X^*, \|.\|_{X^*})$ è riflessivo e separabile allora lo è anche $(X, \|.\|)$ per il Teorema 7.1.3 e il Teorema 7.2.2 (1). Viceversa se $(X, \|.\|)$ è riflessivo e separabile allora lo è anche $(X^{**}, \|.\|_{X^{**}})$ (per riflessività l'immersione canonica per valutazioni Φ_X è un'isometria lineare, ed in particolare un omeomorfismo lineare, tra $(X, \|.\|)$ e $(X^{**}, \|.\|_{X^{**}})$) e sempre per il Teorema 7.1.3 e il Teorema 7.2.2 (1) si ottiene quanto voluto per $(X^*, \|.\|_{X^*})$. □

8

Teoria degli Operatori Lineari Limitati, seconda parte

8.1 Operatori Compatti tra Spazi di Banach

In tutta la sezione saranno fissati $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ due spazi di Banach.

Definizione 8.1.1: Una funzione $T : X \to Y$ è detta *compatta* se

(1) T è continua;

(2) $\forall E \subset X$ limitato vale $T(E)$ relativamente compatto in Y (cioè $\overline{T(E)}$ compatto in Y).

Osservazione 8.1.2: Nel contesto della definizione precedente, essendo Y spazio di Banach, due condizioni equivalenti a (2) sono le seguenti:

(2)' $\forall E \subset X$ limitato vale $T(E)$ totalmente limitato;

(2)" $T(\overline{B}_X)$ è totalmente limitato.

Proposizione 8.1.3: *Un operatore $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ è compatto se e solo se $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione limitata vale che $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette sottosuccessione convergente in Y.*

Dimostrazione. Se T è compatto e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è una successione limitata allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è sottoinsieme limitato di X e quindi $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatto, da cui segue facilmente quanto voluto. Viceversa prendiamo $E \subset X$ un qualsiasi sottoinsieme limitato di X allora per l'ipotesi $\overline{T(E)}$ è sequenzialmente compatto e quindi compatto in Y. □

Lemma 8.1.4: *Se X è riflessivo allora è* localmente sequenzialmente debolmente compatto*, cioè $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione limitata $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione debolmente convergente in X.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione limitata. Consideriamo $X_0 = \overline{\mathrm{span}}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ che è sottospazio chiuso, separabile e riflessivo di X (sottospazio chiuso di un riflessivo è riflessivo). Quindi anche il suo duale è separabile (per il Corollario 7.2.4) e di conseguenza ogni palla chiusa di X_0, $\overline{B}(0, R) \cap X_0$ con $R > 0$, munita della rispettiva restrizione della topologia debole di X_0, è metrizzabile e sequenzialmente compatta (Proposizione 5.2.18), ma per limitatezza $\exists R_0 > 0$ t.c.

$\overline{B}(0, R_0) \cap X_0 \supset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dunque $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione convergente nella topologia debole di X_0 che in realtà non è altro che $\sigma(X, X^*)_{|X_0}$ (per il Teorema 5.1.7 di transitività). □

Proposizione 8.1.5: *Supponiamo X riflessivo. Allora $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ è compatto se e solo se $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ t.c. $x_n \rightharpoonup x \in X$ vale $Tx_n \to Tx$ in Y.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Supponiamo T compatto. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ t.c. $x_n \rightharpoonup x$ e senza perdita di generalità possiamo supporre $x = 0$. Vogliamo dimostrare che $Tx_n \to 0$ in Y. Per la convergenza debole che abbiamo assunto si ha

$$\langle f, x_n\rangle \to 0 \;\; \forall f \in X^*$$

dunque $\{\mathrm{ev}_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^{**}$ è puntualmente limitata su X^*, quindi per il Teorema 6.2.6 di uniforme limitatezza si ha l'esistenza di un $M > 0$ t.c.

$$\|\mathrm{ev}_{x_n}\|_{X^{**}} \le M \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma l'immersione canonica per valutazioni è un'isometria, quindi vale $\|x_n\|_X \le M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, questo dimostra che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in X e quindi per la Proposizione 8.1.3 esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $Tx_{n_k} \to y$ in Y per un qualche $y \in Y$. Dico che $y = 0 \in Y$. Infatti

$$|\langle g, y\rangle| = \lim_{k\to+\infty} |\langle g, Tx_{n_k}\rangle| = \lim_{k\to+\infty} |\langle T^* g, x_{n_k}\rangle| = 0 \;\; \forall g \in Y^*$$

perché $T^* g \in X^* \;\; \forall g \in Y^*$. Dunque per il Corollario 4.1.5 del Teorema di Hahn-Banach si ha $\|y\|_Y = 0$, cioè $y = 0 \in Y$. Potendo fare questo per ogni sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quanto voluto segue dalla Proprietà di Urysohn.

Per il viceversa usiamo la Proposizione 8.1.3. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, essendo X riflessivo è localmente debolmente sequenzialmente compatto (Lemma 8.1.4), dunque esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \rightharpoonup x$ per un qualche $x \in X$, ma allora per ipotesi si ha $Tx_{n_k} \to Tx$. □

Definizione 8.1.6: Indicheremo con $\mathrm{L}_C(X,Y)$ la famiglia degli operatori lineari compatti tra X ed Y. E chiameremo $\mathrm{L}_C(X) = \mathrm{L}_C(X,X)$.

Osservazione 8.1.7: Ovviamente $\mathrm{L}_C(X,Y) \subset \mathrm{L}(X,Y)$.

Proposizione 8.1.8: *Valgono i seguenti fatti:*

(1) $\mathrm{L}_C(X,Y)$ *è un sottospazio lineare chiuso di* $\mathrm{L}(X,Y)$.

(2) Sia $(Z, \|.\|_Z)$ un terzo spazio di Banach e siano $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ e $S \in \mathrm{L}(Y,Z)$. Allora $ST \in \mathrm{L}_C(X,Z)$ purché almeno uno tra L ed S sia compatto. In particolare $\mathrm{L}_C(X)$ *è un ideale bilatero dell'algebra* $\mathrm{L}(X)$.

Dimostrazione. (1) Sia $T \in \overline{\mathrm{L}_C(X,Y)}$. Per ogni $S \in \mathrm{L}_C(X,Y)$ si ha

$$T(\overline{B}_X) = [S + (T-S)](\overline{B}_X) \subset S(\overline{B}_X) + \|T-S\|_{\mathrm{op}} \overline{B}_Y.$$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $S \in \mathrm{L}_C(X,Y)$ t.c.

$$\|T-S\|_{\mathrm{op}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ed essendo $S(\overline{B}_X)$ totalmente limitato (è relativamente compatto in un metrico completo) si ricopre con finite palle di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$, cioè $\exists F \subset S(\overline{B}_X)$ finito t.c.

$$S(\overline{B}_X) \subset F + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B}_Y$$

e quindi mettendo insieme si trova

$$T(\overline{B}_X) \subset F + \varepsilon\overline{B}_Y$$

dunque anche $T(\overline{B}_X)$ è totalmente limitato per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. Dunque T è compatto e $\overline{\mathrm{L}_C(X,Y)} = \mathrm{L}_C(X,Y)$. Vediamo che $\mathrm{L}_C(X,Y)$ è effettivamente un sottospazio lineare. Se $T, S \in \mathrm{L}_C(X,Y)$ allora

$$(T+S)(\overline{B}_X) \subset T(\overline{B}_X) + S(\overline{B}_X)$$

è totalmente limitato perché T, S sono compatti e la somma è un'applicazione continua tra due spazi di Banach (e quindi somma di totalmente limitati è totalmente limitata). Infine se $\lambda \in \mathbb{K}$ allora $(\lambda T)(\overline{B}_X) = \lambda T(\overline{B}_X)$ che è totalmente limitato perché T è compatto e la moltiplicazione per scalare è un'applicazione continua tra spazi di Banach.

(2) Ovviamente presi T e S come nell'enunciato, se almeno uno tra T ed S è compatto, vale che $S(T(\overline{B}_X))$ è totalmente limitato. Infatti se T è compatto allora già da subito $T(\overline{B}_X)$ è totalmente limitato e quindi anche $S(T(\overline{B}_X))$ lo sarà perché S è continua. Se invece T non è compatto ma lo è S allora comunque $T(\overline{B}_X)$ è limitato per continuità e quindi $S(T(\overline{B}_X))$ sarà totalmente limitato.

□

Definizione 8.1.9: Uno operatore lineare $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ è detto *di rango finito* se $\mathrm{Ran}(T)$ ha dimensione finita. Nel seguito indicheremo con $\mathrm{L}_f(X,Y)$ la famiglia di operatori lineari continui di rango finito.

Esempio 8.1.10: Un classico esempio di operatore di rango finito è il seguente: siano $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n} \subset X^*$ e $\{y_i\}_{i=1,\dots,n} \subset Y$ allora $T : X \to Y$ t.c.

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, x\rangle y_i \quad \forall x \in X$$

è un operatore lineare continuo di rango finito.

Osservazione 8.1.11: In generale si ha $\mathrm{L}_f(X,Y) \subset \mathrm{L}_C(X,Y)$ e può accadere $\overline{\mathrm{L}_f(X,Y)} \subsetneq \mathrm{L}_C(X,Y)$.

Proposizione 8.1.12: *Sia H è uno spazio di Hilbert. Allora* $\mathrm{L}_C(H) = \overline{\mathrm{L}_f(H)}$.

Dimostrazione. Sia $T \in \mathrm{L}_C(H)$. Allora $\overline{\mathrm{Ran}}(T) = \overline{\mathrm{span}}(T(\overline{B}_H))$ è separabile (perché per l'Osservazione 8.1.2 (2)" $T(\overline{B}_H)$ è totalmente limitato e quindi separabile), dunque ammette una base hilbertiana numerabile e quindi esiste una successione di proiettori $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di rango finito (prendiamo P_n il proiettore sullo span dei primi n vettori della base hilbertiana) t.c.

$$\overline{\mathrm{Ran}}(T) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(H)}.$$

Dico che $P_nT \to T$ in $\mathrm{L}_C(H)$, infatti questo significa $P_{n|\overline{T(\overline{B}_H)}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{H|\overline{T(\overline{B}_H)}}$ uniformemente e questo segue dal Teorema di Ascoli-Arzelà, infatti $\overline{T(\overline{B}_H)}$ è compatto e le $\left\{P_{n|\overline{T(\overline{B}_H)}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

sono equilipschitizane di costante 1 e convergono puntualmente a $\mathrm{Id}_{H}{}_{|\overline{T(B_H)}}$, dunque esiste una sottosuccessione di $\left\{P_n{}_{|\overline{T(B_H)}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente a $\mathrm{Id}_{H}{}_{|\overline{T(B_H)}}$ e potendo fare questo ragionamento anche per ogni sottosuccessione la convergenza voluta segue dalla Proprietà di Uryshon. Ma allora $T \in \overline{\mathrm{L}_f(H)}$. □

Esempio 8.1.13: Alcuni esempi notevoli di operatori compatti sono i seguenti:

(1) Sia $K \in C^0([0,1]^2)$ consideriamo $T_K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ t.c.

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Infatti è lineare ed è compatto per il teorema di Ascoli-Arzelà, infatti K è continua su un compatto dunque è UC ed in particolare ammette un modulo di continuità ω. Allora $\forall f \in C^0([0,1])$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ vale

$$|T_K f(x) - T_K f(x')| \leq \int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)||f(y)|\,dy \leq \omega(|x-y|)\|f\|_\infty$$

cioè le $\{T_K f \mid f \in \overline{B}_{C^0([0,1])}\}$ sono equicontinue. In particolare, per ogni successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{C^0([0,1])}$, esisterà una sottosuccessione di $(T_K f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente su $[0,1]$ e quindi si ha la compattezza voluta grazie alla Proposizione 8.1.3.

(2) Sia $K \in L^2([0,1]^2)$ è ben definito $T_K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ t.c.

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Infatti è lineare ed è compatto perché è limite di operatori di rango finito in norma operatoriale. Vediamolo approssimando K in $L^2([0,1]^2)$ con K_n semplice, costante sugli n^2 quadrati $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}] = I_i \times I_j$ con $i,j \in \{1,\dots,n\}$ con K_n che su $I_i \times I_j$ vale $⨍_{I_i\times I_j} K(x,y)dxdy$. Allora si verifica che $K_n \to K$ in $L^2([0,1]^2)$. Inoltre T_{K_n} ha immagine contenuta in $\mathrm{span}(\{\mathbb{1}_{I_i\times I_j} \mid i,j \in \{1,\dots,n\}\})$ e quindi dalla convergenza L^2 si ottiene che $T_{K_n} \to T_K$ in norma operatoriale.

Teorema 8.1.14 (di Schauder): *Dati $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ spazi di Banach e $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ è compatto se e solo se $T^* \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ è compatto.*

Dimostrazione. Se T è compatto e $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y^*$ t.c. $\|y_n^*\|_{Y^*} \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, con $M > 0$, vale che $\left\{y_n^*{}_{|\overline{T(B_X)}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione equilipschitziana (di costante M) di funzioni definite sul compatto $\overline{T(B_X)}$ e quindi per il Teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione $\{y_{n_k}^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $y_{n_k}^* \circ T$ converge uniformemente su $\overline{B}_X$ o equivalentemente t.c. $T^* y_{n_k}^*$ converge in X^*. Dunque T^* è compatta per la Proposizione 8.1.3

Viceversa se T^* è compatto allora per quanto appena provato anche $T^{**} \in \mathrm{L}(X^{**}, Y^{**})$ è compatto, ma la composizione

$$X \xrightarrow{\Phi_X} \{\mathrm{ev}_x\}_{x\in X} \subset X^{**} \xrightarrow{T^{**}{}_{|\Phi_X(X)}} \{\mathrm{ev}_{Tx}\}_{x\in X} \subset Y^{**} \xrightarrow{\Phi_Y^{-1}} Y$$

con Φ_X e Φ_Y le rispettive immersioni nel biduale per valutazioni, coincide con T ed essendo T^{**} compatta si ha che tutta la composizione, cioè T, è compatta. □

8.2 Teoria Spettrale di Fredholm-Riesz-Schauder su Spazi di Banach

Lemma 8.2.1: *Sia $(X, \|.\|)$ spazio di Banach su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. L'identità Id_X è un operatore lineare compatto se e solo se X ha dimensione finita.*

Dimostrazione. L'identità di X è operatore compatto se e solo se $\mathrm{Id}_X(\overline{B}_X) = \overline{B}_X$ è compatta in X e questo, per il Teorema 3.5.1 di Riesz avviene se e solo se X ha dimensione finita. □

Teorema 8.2.2 (di Fredholm): *Siano $(X, \|.\|)$ spazio di Banach e $T \in \mathrm{L}_C(X)$. Allora:*

(1) $\mathrm{Ker}(I-T)$ *è sottospazio lineare chiuso, di dimensione finita e T-invariante; e più in generale per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

(2) $K_n = \mathrm{Ker}((I-T)^n)$ *è sottospazio lineare chiuso, di dimensione finita, T-invariante e $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è successione crescente per inclusione stazionaria;*

(3) $\mathrm{Ran}(I - T)$ *è sottospazio lineare chiuso, di codimensione finita e T-invariante; e più in generale per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

(4) $R_n = \mathrm{Ran}((I - T)^n)$ *è sottospazio lineare chiuso, di codimensione finita, T-invariante e $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è successione decrescente per inclusione stazionaria.*

Dimostrazione. (1) Essendo nucleo di un operatore continuo $\mathrm{Ker}(I - T)$ è chiuso. Inoltre è T-invariante perché T e $I-T$ commutano. Poi $T_{|\mathrm{Ker}(I-T)} : \mathrm{Ker}(I-T) \to \mathrm{Ker}(I-T)$ è compatto e coincide con l'identità, dunque $\mathrm{Ker}(I - T)$ ha dimensione finita per il Lemma 8.2.1.

(2) Per $n \in \mathbb{N}_+$, usando il fatto che $\mathrm{L}_C(X)$ è un ideale bilatero (Proposizione 8.1.8 (2)), possiamo scrivere $(I - T)^n = I - T'$ con $T' \in \mathrm{L}_C(X)$. Quindi per (1) K_n è sottospazio lineare chiuso e di dimensione finita, inoltre è T-invariante perché T commuta con $(I - T)^n$. Ovviamente $K_n \subset K_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Vediamo che la successione è stazionaria. Se $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non fosse successione stazionaria, allora per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ esisterebbe $x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$ ed anzi, a meno di traslazione ed omotetia per ognuno, li possiamo prendere t.c.

$$\begin{cases} \|x_n\| \leq 2 \\ \mathrm{dist}(x_n, K_{n-1}) \geq 1 \\ x_n \in K_n \end{cases} .$$

Allora per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, $i > j$, vale

$$Tx_i - Tx_j = x_i - (I - T)x_i - Tx_j \in x_i - K_{i-1}$$

in quanto $(I - T)x_i \in K_{i-1}$ e $Tx_j \in T(K_j) \subset K_j \subset K_{i-1}$. Di conseguenza abbiamo

$$\|Tx_i - Tx_j\| \geq \mathrm{dist}(x_i, K_{i-1}) \geq 1 \tag{8.1}$$

però $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, quindi si ha un assurdo perché T è compatto, dunque $(Tx_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dovrebbe avere sottosuccessione convergente (Proposizione 8.1.3), cosa che per l'eq. (8.1) non può accadere.

(3) $\mathrm{Ran}(I - T)$ è certamente sottospazio lineare T-invariante. Vediamo che è chiuso. Sia X_1 un addendo diretto di $\mathrm{Ker}(I - T) = K_1$ (Osservazione 4.1.4), $X = K_1 \oplus X_1$. Allora $(I - T)_{|X_1} : X_1 \to R_1$ è bigettivo. Dico che è fortemente iniettivo, cioè che $\|(I-T)x\| \geq C\|x\|$ $\forall x \in X_1$

per una qualche $C > 0$. Se così non fosse ci sarebbe una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_1$ con $\|x_n\| = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ e t.c. $x_n - Tx_n \longrightarrow 0$. A meno di prenderne una sottosuccessione possiamo supporre che

$$Tx_n \longrightarrow y \in X_1$$

per un qualche $y \in X_1$ (che è chiuso), infatti

$$x_n = Tx_n + (x_n - Tx_n) \longrightarrow y.$$

Inoltre queste due convergenze e la continuità di T implicano che $Ty = y$ e $\|y\| = 1$, cioè $y \in X_1 \cap K_1$ e $y \neq 0$ e questo ci dà un assurdo in quanto $(I-T)_{|X_1}$ è bigettiva (in particolare iniettiva). Di conseguenza $(I-T)_{|X_1} : X_1 \to R_1$ è fortemente iniettiva e surgettiva, quindi $\mathrm{Ran}(I-T)$ è chiuso per la Proposizione 6.4.17.

(4) Sia $n \in \mathbb{N}_+$ prima vale $(I-T)^n = I - T'$ con $T' \in \mathrm{L}_C(X)$, quindi da (3) segue che R_n è sottospazio lineare chiuso, inoltre è T-invariante perché T commuta con $(I-T)^n$. Banalmente vale $R_{n+1} \subset R_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Vediamo che la successione è stazionaria. Si fa come prima, se non fosse stazionaria si avrebbe una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$\begin{cases} \|x_n\| \leq 2 \\ \mathrm{dist}(x_n, R_{n+1}) \geq 1 \\ x_n \in R_n \end{cases} .$$

Alloa per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ vale

$$Tx_i - Tx_j = x_i - (I-T)x_i - Tx_j \in x_i - R_{i+1}$$

in quanto $(I-T)x_i \in R_{i+1}$ e $Tx_j \in T(R_j) \subset R_j \subset R_{i+1}$, quindi

$$\|Tx_i - Tx_j\| \geq \mathrm{dist}(x_i, R_{i+1}) \geq 1$$

e si conclude come in (2).

□

Corollario 8.2.3: *Siano $(X, \|.\|)$ spazio di Banach e $T \in \mathrm{L}_C(X)$. Allora sono equivalenti:*

(1) $I - T$ è iniettivo;

(2) $I - T$ è surgettivo;

(3) $I - T$ è omeomorfismo lineare.

Dimostrazione. In generale se V è uno spazio vettoriale e $L : V \to V$ è lineare vale

$$\begin{cases} L \text{ iniettiva} \\ L \text{ non surgettiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^n \text{ iniettivo} \\ L(V) \subsetneq V \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}_+ \ \Rightarrow \ L^{n+1}(V) \subsetneq L^n(V) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ed analogamente

$$\begin{cases} L \text{ surgettiva} \\ L \text{ non iniettiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^n \text{ surgettivo} \\ \mathrm{Ker}(L) \supsetneq \{0\} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}_+ \ \Rightarrow \ \mathrm{Ker}(L^{n+1}) \supsetneq \mathrm{Ker}(L^n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, tornando al nostro caso in cui i nuclei e le immagini devono stabilizzarsi ad un certo punto (Teorema 8.2.2), sarà $I - T$ iniettivo se e solo se surgettivo se e solo se bigettivo e quest'ultima proprietà, per il Corollario 6.3.2, equivale ad essere un omeomorfismo lineare (per un operatore lineare continuo). □

Proposizione 8.2.4: *Siano $(X, \|.\|)$ spazio di Banach e $T \in \mathrm{L}_C(X)$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale*

$$\dim(\mathrm{Ker}[(I-T)^n]) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}[(I-T)^n]) = \dim(\mathrm{Ker}[(I-T^*)^n]) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}[(I-T^*)^n]).$$

Dimostrazione. Considerando come prima $T' = I - (I-T)^n$ basta dimostrare il risultato per $n = 1$. Proviamo che

$$\dim(\mathrm{Ker}[I-T]) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}[I-T]).$$

Sia X_1 un addendo diretto topologico di K_1, $X = K_1 \oplus X_1$ e sia Y_1 un addendo diretto algebrico di R_1 (che è sottospazio lineare chiuso, ma al momento non necessariamente ammette addendo diretto topologico), $X = Y_1 \oplus_{alg} R_1$. Sia P il proiettore su K_1 in $X = K_1 \oplus X_1$. Notiamo che esiste $S : K_1 \to Y_1$ lineare continua che sia o iniettiva o surgettiva (dipende dalla dimensione di Y_1). Allora $I - T + SP$ è o iniettivo (se lo è S, infatti in tal caso si verifica facilmente che il nucleo di $I - T + SP$ è banale usando il fatto che R_1 e Y_1 sono in somma diretta algebrica) o surgettivo (se lo è S) perché $T - SP \in \mathrm{L}_C(X)$ e quindi per il Corollario 8.2.3 è omeomorfismo lineare, dunque anche S è omeomorfismo lineare che implica la tesi

$$\dim(K_1) = \dim(Y_1) = \mathrm{codim}(R_1).$$

Poi considerando T^* coincidono anche gli ultimi due numeri (è la stessa dimostrazione fatta per T). Inoltre $\mathrm{Ker}(I-T^*) = \mathrm{Ran}[(I-T)]^\perp$ che è isometricamente isomorfo a $(X/\mathrm{Ran}(I-T))^*$ che a sua volta è isometricamente isomorfo a $X/\mathrm{Ran}(I-T)$ perché quest'ultimo ha dimensione finita (uguale a $\dim(\mathrm{Ker}[I-T^*])$) quindi $X/\mathrm{Ran}(I-T)$ stesso ha dimensione finita. Dunque

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Ran}[I-T]) = \dim\left(X/\mathrm{Ran}[I-T]\right) = \dim(\mathrm{Ker}[I-T^*]).$$

□

Proposizione 8.2.5: *Siano $(X, \|.\|)$ spazio di Banach e $T \in \mathrm{L}_C(X)$. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ l'indice di stabilizzazione delle due successioni $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora vale $X = R_n \oplus K_n$ $\forall n \geq n_0$.*

Dimostrazione. Se $x \in K_n \cap R_n$, cioè $(I-T)^n x = 0$ e $x = (I-T)^n y$ per un qualche $y \in X$, allora

$$(I-T)^{2n} y = (I-T)^n x = 0$$

cioè $y \in K_{2n}$. Ma $K_{2n} = K_n$, di conseguenza $x = (I-T)^n y = 0$. Inoltre la somma è tutto perché $\mathrm{codim}(R_n) = \dim(K_n)$. La somma diretta è topologica perché i due addendi sono chiusi. □

D'ora in poi sarà fissato $(X, \|.\|)$ spazio di Banach complesso.

Definizione 8.2.6: Sia $T \in \mathrm{L}(X)$. Lo *spettro* di T è

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \notin \mathrm{GL}(X)\}$$

mentre l'insieme degli *autovalori* di T è

$$\sigma_{av}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}\}.$$

Inoltre, se $\lambda \in \sigma_{av}(T)$, un vettore $x \in \mathrm{Ker}(\lambda - T)$ sarà chiamato *autovettore* di T relativo all'autovalore λ.

Osservazione 8.2.7: (1) Siccome $\mathrm{GL}(X)$ è aperto in $\mathrm{L}(X)$ e $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda - T \in \mathrm{L}(X)$ è continua vale che $\sigma(T)$ chiuso in $\mathbb{C}$.

(2) Vale $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|_{\text{op}})$, infatti se $\lambda \in \mathbb{C}$ è con $|\lambda| > \|T\|_{\text{op}}$ vale

$$\lambda - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$$

è invertibile (con la serie di Neumann), quindi $\sigma(T)$ è compatto in $\mathbb{C}$.

Definizione 8.2.8: Sia $T \in \mathrm{L}_C(X)$. Definiamo la *molteplicità geometrica* di $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come

$$m_g(\lambda, T) = \dim(\mathrm{Ker}[\lambda - T])$$

e la *molteplicità algebrica* di $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come

$$m_a(\lambda, T) = \max_{n \in \mathbb{N}} \dim(\mathrm{Ker}[(\lambda - T)^n])).$$

L'*autospazio generalizzato* di $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è

$$V(\lambda, T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}[(\lambda - T)^n].$$

Inoltre, per $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definiamo

$$R(\lambda, T) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ran}[(\lambda - T)^n].$$

Osservazione 8.2.9: Nel contesto della definizione precedente, con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, preso $n_0 \in \mathbb{N}$ l'indice di stabilizzazione di $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Allora

$$V(\lambda, T) = \mathrm{Ker}[(\lambda - T)^{n_0}]$$

e

$$R(\lambda, T) = \mathrm{Ran}[(\lambda - T)^{n_0}].$$

Dunque in particolare abbiamo

$$X = R(\lambda, T) \oplus V(\lambda, T).$$

Osservazione 8.2.10: Nel contesto della definizione precedente vale

$$m_g(\lambda, T) = m_g(\lambda, T^*)$$

e

$$m_a(\lambda, T) = m_a(\lambda, T^*)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposizione 8.2.11 (Riesz-Schauder): *Supponiamo che X abbia dimensione infinita. Sia $T \in \mathrm{L}_C(X)$, allora*

(1) $0 \in \sigma(T)$;

(2) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_{av}(T) \setminus \{0\}$;

(3) ogni $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ è autovalore con $m_a(\lambda, T) = \dim(V(\lambda, T))$;

(4) ogni $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ è punto isolato in $\sigma(T)$. Quindi, essendo $\sigma(T)$ compatto, l'unico possibile punto di accumulazione di $\sigma(T)$ è $\{0\}$;

(5) *dati $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vale $V(\lambda, T) \subset R(\mu, T)$ (e $V(\mu, T) \subset R(\lambda, T)$).*

Dimostrazione. (1) Supponiamo per assurdo $0 \notin \sigma(T)$. Allora T è omoeomorfismo lineare e $I = TT^{-1}$ è compatto perché lo è T, ma questo è un assurdo per il Lemma 8.2.1.

(2) Ovviamente $\sigma_{av}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$. Sia $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ e supponiamo che non sia un autovalore. Allora $X = \mathrm{Ran}(\lambda - T)$, dunque $\lambda - T$ è omeomorfismo lineare per il Corollario 8.2.3, assurdo.

(3) Facile osservazione.

(4) Sappiamo che esiste la decomposizione $X = R(\lambda, T) \oplus V(\lambda, T)$ in spazi T-invarianti e quindi anche $(\mu - T)$-invarianti. Ma

$$\mu - T = (\mu - \lambda) + (\lambda - T) = (\mu - \lambda)[I + (\mu - \lambda)^{-1}(\lambda - T)]$$

e siccome $(\lambda - T)_{|V(\lambda)}$ è nilpotente, la serie di Neumann di $[I + (\mu - \lambda)^{-1}(\lambda - T)]_{|V(\lambda)}$ è convergente (ha solo finiti addendi non nulli) e quindi rappresenta la sua inversa, di conseguenza $[I+(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda-T)]_{|V(\lambda)}$ è omeomorfismo lineare. Quindi $(\mu-T)_{|V(\lambda)} : V(\lambda, T) \to V(\lambda, T)$ è omeomorfismo lineare per qualsiasi $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$.

Invece $(\mu-T)_{|R(\lambda)} : R(\lambda, T) \to R(\lambda, T)$ è omeomorfismo lineare purché $|\mu-\lambda|$ sia sufficientemente piccolo. Infatti $\mathrm{GL}(R(\lambda, T))$ è un aperto di $\mathrm{L}(R(\lambda, T))$ ed anzi se $A \in \mathrm{GL}(R(\lambda, T))$ allora $B_{\mathrm{L}(R(\lambda,T))}(A, \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}) \subset \mathrm{GL}(R(\lambda, T))$, dunque, essendo $(\lambda-T)_{|R(\lambda,T)} \in \mathrm{GL}(R(\lambda, T))$, se $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ vale che $(\mu - T)_{|R(\lambda,T)}$ è omeomorfismo lineare. Di conseguenza per ogni $\mu \in B_{\mathbb{C}}(\lambda, \|(\lambda - T)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1})$ si ha $\mu - T \in \mathrm{GL}(X)$. In conclusione, quindi, $\forall \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \mu \in B_{\mathbb{C}}(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\}$ vale $\mu \notin \sigma(T)$, ossia λ è punto isolato di $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$.

(5) Essendo $\mu \neq \lambda$ si ha che $\lambda - T$ è omeomorfismo lineare su $V(\mu, T)$ (visto nella dimostrazione del punto precedente) e quindi lo è $(\lambda - T)^n$ e di conseguenza $V(\mu, T) \subset R(\lambda, T)$.

□

Osservazione 8.2.12: In generale date due decomposizioni $X = V \oplus R = V' \oplus R'$ con $V \subset R'$, $V' \subset R$ e proiettori $P : X \to V$ e $P' : X \to V'$, se ne deduce un'altra del tipo $X = V \oplus V' \oplus (R \cap R')$ con proiettori P, P' e $I - P - P'$.

Infatti $V \subset R'$, $V' \subset R$ implicano $P'P = PP' = 0$ e quindi $P + P'$ è proiettore lineare ($(P + P')^2 = P^2 + P'^2 + PP' + P'P = P^2 + P'^2 = P + P'$) e vale

$$V + V' \subset \mathrm{Ran}(P + P') \subset \mathrm{Ran}(P) + \mathrm{Ran}(P') = V + V'$$

dunque $\mathrm{Ran}(P + P') = V + V'$. Ma allora $\mathrm{Ker}(P + P') = R \cap R'$, in quanto se $x \in \mathrm{Ker}(P + P')$ allora

$$Px + P'x = 0$$

ed applicando P e P' di nuovo si ottiene $Px = P'x = 0$, ossia $x \in \mathrm{Ker}(P) \cap \mathrm{Ker}(P') = R \cap R'$, quindi $\mathrm{Ker}(P + P') \subset R \cap R'$ e vale ovviamente anche l'inclusione opposta.

In conclusione, se $T \in \mathrm{L}_C(X)$, preso un qualsiasi $\Lambda \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$ finito si ha la decomposizione

$$X = \left[\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda, T)\right] \oplus \left[\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R(\lambda, T)\right].$$

Definizione 8.2.13: Sia $T \in \mathrm{L}(X)$, definiamo il *risolvente* di T come

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

Osservazione 8.2.14: Dato $T \in \mathrm{L}(X)$ il risolvente di T, $\rho(T)$, è aperto in $\mathbb{C}$. Infatti $\mathbb{C} \setminus \rho(T) = \sigma(T)$ è chiuso.

Proposizione 8.2.15: *Sia $T \in \mathrm{L}(X)$, allora valgono le seguenti affermazioni:*

(1) per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|T\|_{op}$ vale

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^{-n-1} T^n;$$

(2) per ogni $\lambda_0 \in \rho(T)$ ed ogni $\lambda \in B_{\mathbb{C}}(\lambda_0, \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|_{op}^{-1})$ vale

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \lambda)^n [(\lambda_0 - T)^{-1}]^{n+1}$$

ed in particolare la mappa risolvente *associata a T*

$$\rho(T) \ni \lambda \longmapsto (\lambda - T)^{-1} \in \mathrm{L}(X)$$

è analitica e $\|(\lambda - T)^{-1}\|_{op} \to 0$ per $|\lambda| \to +\infty$;

(3) (identità del risolvente) *per ogni $\lambda, \mu \in \rho(T)$ vale*

$$(\lambda - T)^{-1} - (\mu - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1}.$$

Dimostrazione. (1) Segue dalla serie di Neumann.

(2) Vale

$$\lambda - T = (\lambda_0 - T) - (\lambda_0 - \lambda) = (\lambda_0 - T)[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}]$$

quindi per $|\lambda_0 - \lambda| < \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$, usando la serie di Neumann, si trova

$$(\lambda - T)^{-1} = \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \lambda) [(\lambda_0 - T)^{-1}]^n \right] (\lambda_0 - T)^{-1}$$

da cui segue quanto voluto.

□

Corollario 8.2.16: *Se $T \in \mathrm{L}(X)$ allora $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Se fosse $\sigma(T) = \emptyset$ allora si avrebbe $\rho(T) = \mathbb{C}$ e la mappa risolvente $R_T : \mathbb{C} \to \mathrm{L}(X)$ sarebbe intera e infinitesima così come $\phi \circ R_T$ per ogni $\phi \in X^*$, ma allora per ogni $\phi \in X^*$ la mappa $\phi \circ R_T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è analitica e limitata, dunque costante per il Teorema di Liouville e quindi (essendo infinitesima) dovrebbe essere costantemente nulla, che è un assurdo. □

Definizione 8.2.17: Dato $T \in \mathrm{L}(X)$ definiamo il suo *raggio spettrale* come

$$\mathbf{r}(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Lemma 8.2.18: *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale subadditiva, cioè t.c. $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}_+$, allora*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{a_n}{n}.$$

Dimostrazione. Dato $d \in \mathbb{N}_+$, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si ha $n = p_n d + k$ con $0 \leq k < d$ e $p_n = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$. Allora per subadditività si ha

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}(p_n a_d + a_k)$$

e

$$\inf_{m\in\mathbb{N}_+} \frac{a_m}{m} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}(p_n a_d + a_k) \leq \frac{p_n d}{n}\frac{a_d}{d} + \frac{1}{n} \max_{1\leq k\leq d} a_k.$$

Quindi per ogni $d \in \mathbb{N}_+$ abbiamo

$$\inf_{m\in\mathbb{N}_+} \frac{a_m}{m} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_d}{d}$$

(abbiamo usato che $\frac{p_n d}{n} \to 1$ e che $\frac{1}{n} \max_{1\leq k\leq d} a_k \to 0$ per $n \to +\infty$), quindi prendendo l'$\inf_{d\in\mathbb{N}_+}$ si ottiene

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{a_n}{n}$$

da cui segue la tesi. □

Proposizione 8.2.19 (Formula di Gelfand per il raggio spettrale): *Sia $T \in \mathrm{L}(X)$, allora vale*

$$\mathbf{r}(T) = \inf_{n\in\mathbb{N}_+} \|T^n\|_{op}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|_{op}^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione. La successione $\big(\log(\|T^n\|_{\mathrm{op}})\big)_{n\in\mathbb{N}_+}$ è subadditiva, infatti

$$\log(\|T^{m+n}\|_{\mathrm{op}}) \leq \log(\|T^m\|_{\mathrm{op}}\|T^n\|_{\mathrm{op}}) = \log(\|T^m\|_{\mathrm{op}}) + \log(\|T^n\|_{\mathrm{op}}) \;\; \forall n, m \in \mathbb{N},$$

dunque, per il Lemma 8.2.18, esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \log(\|T^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{n}})$ e quindi esponenziando si ottiene

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}_+} \|T^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{n}}.$$

Inoltre se $\lambda \in \sigma(T)$, ossia $\lambda - T \notin \mathrm{GL}(X)$, allora anche $\lambda^n - T^n \notin \mathrm{GL}(X)$ (perché $\lambda - T$ ne è un "fattore"), cioè $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$. Quindi $|\lambda^n| \leq \|T^n\|_{\mathrm{op}}$ (Osservazione 8.2.7 (2)), cioè

$$|\lambda| \leq \|T^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{n}} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_+$$

e quindi

$$|\lambda| \leq \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{n}}$$

da cui segue $\mathbf{r}(T) \leq \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{n}}$.

Per la disuguaglianza opposta prendiamo $r > \mathbf{r}(T)$, allora $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{C}}(0, r)$. Osserviamo che $(z^{-1} - T)^{-1}$ è ben definito per ogni $z \in B_{\mathbb{C}}(0, \mathbf{r}(T)^{-1})$, infatti se $|z| < \mathbf{r}(T)^{-1}$ allora $z^{-1} \in \rho(T)$, questo almeno per $z \neq 0$, ma per la Proposizione 8.2.15 vale, almeno per $z \in B(0, \|T\|_{\mathrm{op}}^{-1}) \setminus \{0\}$, lo sviluppo

$$(z^{-1} - T)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n+1} T^n$$

fatto che ci permette di estendere analiticamente la funzione considerata anche a $z = 0$. Consideriamo quindi la famiglia di funzioni analitiche $\{f_{x,x^*} \mid x \in X,\ x^* \in X^*\}$ t.c.

$$\rho(T) \ni z \overset{f_{x,x^*}}{\longmapsto} \langle x^*, (z^{-1} - T)^{-1}x\rangle \in \mathbb{C}$$

il cui sviluppo in serie di potenze è

$$f_{x,x^*}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x^*, T^n x\rangle z^{n+1}.$$

Poiché questa serie converge uniformemente almeno per $z \in \overline{B}_{\mathbb{C}}(0, r^{-1}) \subset B_{\mathbb{C}}(0, \mathbf{r}(T)^{-1})$ (la serie di Taylor in un dato punto di una funzione analitica converge assolutamente almeno nel più grande disco con centro il centro dello sviluppo contenuto nel dominio su cui è analitica), ma allora la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x^*, r^{-n-1}T^n x\rangle w^{n+1}$ converge assolutamente almeno per $w \in B_{\mathbb{C}}(0,1)$ i suoi termini sono limitati in $n \in \mathbb{N}$. Quindi

$$|\langle x^*, r^{-n-1}T^n x\rangle| \leq C(x, x^*)$$

per una costante $C(x, x^*) > 0$, per ogni $n \in N$, ogni $x \in X$ ed ogni $x^* \in X^*$. Di conseguenza per il Teorema 6.2.6 di uniforme limitatezza si ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} |\langle x^*, r^{-n-1}T^n x\rangle| \leq \tilde{C}$$

con $\tilde{C} > 0$, da cui segue (grazie al Corollario 4.1.5)

$$\|r^{-n-1}T^n\|_{\text{op}} \leq \tilde{C} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ossia

$$\|T^n\|_{\text{op}} \leq \tilde{C} r^{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|_{\text{op}}^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} r^{\frac{n+1}{n}} \tilde{C}^{\frac{1}{n}} = r$$

da cui segue quanto voluto per l'arbitrarietà di $r > \mathbf{r}(T)$. □

Osservazione 8.2.20 (Teoria spettrale nel caso reale): Se $(X, \|.\|)$ è uno spazio di Banach reale, si può considerare la sua *complessificazione*

$$X_{\mathbb{C}} = X \times X$$

con la "struttura complessa" data dall'operatore "immaginario" $J : X\times X \to X\times X$ t.c. $J((x, y)) = (-y, x)$. Dunque possiamo utilizzare l'usuale notazione $x + iy$ per indicare $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$. Ed è possibile dare una struttura da spazio vettoriale complesso a $X_{\mathbb{C}}$ munendolo dell'usuale somma

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \ \ \forall x, x', y, y' \in X$$

e del prodotto per scalare complesso

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay) \ \ \forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y \in X.$$

Inoltre si può dotare $X_{\mathbb{C}}$ di una norma complessa $\|.\|_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to [0, +\infty)$ prendendo ad esempio $\|x + iy\|_{\mathbb{C}} = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Poi preso $T \in \mathrm{L}(X)$ possiamo considerare il suo *complessificato* $T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ t.c.

$$T_{\mathbb{C}}[x + iy] = Tx + iTy \ \ \forall x, y \in X$$

e si verifica facilmente che questo definisce un operatore $\mathbb{C}$-lineare continuo su $X_{\mathbb{C}}$. Ed è possibile considerare come teoria spettrale di T quella (già nota) di $T_{\mathbb{C}}$.

8.3 Operatori Simmetrici su uno Spazio di Hilbert

Nel seguito, se non specificato diversamente, sarà fissato H spazio di Hilbert complesso di dimensione infinita con prodotto hermitiano $(. \cdot .)$ e norma da esso indotta $\|.\|$.

Definizione 8.3.1: Un operatore $A \in \mathrm{L}(H)$ è detto *simmetrico* se

$$(Ax \cdot y) = (x \cdot Ay)\ \forall x, y \in H.$$

Inoltre denoteremo lo spazio degli operatori lineari limitati simmetrici su H con $\mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$, ossia se $A^* = A$.

Proposizione 8.3.2: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Allora:*

(1) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ran}(A)^\perp$ *e* $\overline{\mathrm{Ran}}(A) = \mathrm{Ker}(A)^\perp$ *(ortogonali in spazi di Hilbert);*

(2) se $H_0 \subset H$ è un sottospazio lineare A-invariante, allora $H_0^\perp$ e $\overline{H_0}$ sono anch'essi sottospazi lineari A-invarianti;

(3) $\sigma(A) \subset [-\|A\|_{op}, \|A\|_{op}] \subset \mathbb{R}$;

(4) autovettori di autovalori differenti sono ortogonali;

(5) gli autovalori sono semisemplici, ossia $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \sigma_{av}(A)$.

Dimostrazione. (1) Vediamo la prima uguaglianza. Vale $x \in \mathrm{Ker}(A)$ se e solo se $Ax = 0$ e questo vale se e solo se

$$(Ax \cdot y) = 0\ \ \forall y \in H$$

che si può riscrivere, usando la simmetria di A, come

$$(x \cdot Ay) = 0\ \ \forall y \in H$$

che è equivalente a dire $x \in \mathrm{Ran}(A)^\perp$. La seconda uguaglianza segue dalla prima applicando l'ortogonale.

(2) Il fatto che $\overline{H_0}$ è A-invariante segue dal fatto che se ho una successione in H_0 questa verrà mandata da A in una successione ancora in H_0 (perché questo è A-invariante). Vediamo l'altro fatto. Sia $x \in H_0^\perp$, allora

$$(Ax \cdot y) = (x \cdot Ay) = 0\ \ \forall y \in H_0$$

in quanto H_0 è A-invariante, dunque $Ax \in H_0^\perp$.

(3) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ vale che $(a + ib) - A \in \mathrm{GL}(H)$, infatti è omeomorfismo lineare

$$((a + ib) - A)((a - ib) - A) = (a - A)^2 + b^2.$$

Per vedere quest'ultima cosa basta dimostrare che $(a - A)^2 + b^2$ è fortemente iniettivo, infatti da questo segue che è iniettiva e con immagine chiusa e questo ci dà anche la surgettività per il punto (1), quindi per il Corollario 6.3.2 del Teorema della mappa aperta si ha quanto voluto. Vediamo quindi la forte iniettività

$$\|[(a - A)^2 + b^2]x\|^2 = \|(a - A)^2 x\|^2 + 2b^2\|(a - A)^2 x\| + b^4\|x\|^2 \geq b^4\|x\|^2.$$

(4) Facile verifica.

(5) Sia $\lambda \in \sigma_{av}(A)$. Vale che $\mathrm{Ker}((\lambda - A)^2) = \mathrm{Ker}(\lambda - A)$, infatti un contenimento è ovvio e preso $x \in \mathrm{Ker}((\lambda - A)^2)$ si ha

$$\|(\lambda - A)x\|^2 = (((\lambda - A)x) \cdot (\lambda - A)x) = ((\lambda - A)^2 x \cdot x) = 0$$

dunque $x \in \mathrm{Ker}(\lambda - A)$. Ma allora la successione dei nuclei si stabilizza subito e questo implica che l'autospazio generalizzato di λ coincide in realtà con l'autospazio di λ.

□

Proposizione 8.3.3: *Sia H spazio di Hilbert reale e $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Sia $H \ni x \mapsto q_A(x) = (Ax \cdot x) \in \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad A. Denotiamo*

$$r_A = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |q_A(x)| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leq 1}} |q_A(x)|,$$

allora vale $r_A = \|A\|_{op}$.

Dimostrazione. Per il Corollario 4.1.8 si ha

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x, y \in H \\ \|x\|, \|y\| \leq 1}} (Ax \cdot y)$$

e per ogni $x, y \in H$ con $\|x\|, \|y\| \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}(Ax \cdot y) &= \frac{1}{4}[q_A(x+y) - q_A(x-y)] \\ &\leq \frac{1}{4}[r_A\|x+y\|^2 + r_A\|x-y\|^2] \\ &= \frac{r_A}{4}[2\|x\|^2 + 2\|y\|^2] \leq r_A\end{aligned}$$

quindi $\|a\|_{\mathrm{op}} \leq r_A$, da cui segue la tesi. □

Definizione 8.3.4: Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$, chiamiamo *quoziente di Rayleigh* relativo ad A la funzione $f_A : H \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f_A(x) = \frac{(Ax \cdot x)}{(x \cdot x)}.$$

Proposizione 8.3.5 (Caratterizzazione variazionale degli autovalori): *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Una coppia $(x, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ sono una coppia (autovettore, autovalore) per A se e solo se sono una coppia (punto critico, valore critico) per il quoziente di Rayleigh f_A relativo ad A.*

Dimostrazione. Il gradiente di f_A è

$$\begin{aligned}\nabla f_A(x) &= \frac{(x \cdot x)\nabla q_A(x) - q_A(x)\nabla(x \cdot x)}{(x \cdot x)^2} \\ &= 2\frac{(x \cdot x)Ax - (Ax \cdot x)x}{(x \cdot x)^2} = 2\frac{Ax - f_A(x)x}{(x \cdot x)}\end{aligned}$$

quindi $\nabla f_A(x) = 0$ se e solo se $Ax = f_A(x)x$, cioè la tesi. □

Lemma 8.3.6: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$, allora vale $\|A\|_{op}^{2^n} = \|A^{2^n}\|_{op}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per $n = 1$, il caso di $n > 1$ segue poi iterando. Per ogni $x \in H$ vale per la Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\|Ax\|^2 = (Ax \cdot Ax) = (A^2x \cdot x) \leq \|A^2\|_{\mathrm{op}}\|x\|^2$$

dunque

$$\|A\|_{\mathrm{op}}^2 = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\|^2 \leq \|A^2\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}^2$$

che ci dà quanto voluto. □

Proposizione 8.3.7: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$, allora vale $\mathbf{r}(A) = \|A\|_{op}$. In particolare almeno uno tra $\|A\|_{op}$ e $-\|A\|_{op}$ appartiene a $\sigma(A)$ e se $\sigma(A) = \{0\}$ allora $A = 0$.*

Dimostrazione. Grazie la Formula di Gelfand (Proposizione 8.2.19) ed al Lemma precedente si ha

$$\mathbf{r}(A) = \lim_{m\to+\infty} \|A^m\|_{\mathrm{op}}^{\frac{1}{m}} = \lim_{n\to+\infty} \|A^{2^n}\|_{\mathrm{op}}^{2^{-n}} = \|A\|_{\mathrm{op}}.$$

La penultima affermazione segue quindi dalla Proposizione 8.3.2 (3), mentre se $\sigma(A) = 0$ allora $\|A\|_{\mathrm{op}} = \mathbf{r}(A) = 0$ da cui $A = 0$. □

Definizione 8.3.8: Per un operatore $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$ la scrittura

$$A \geq 0$$

significa $(Ax \cdot x) \geq 0 \ \ \forall x \in H$.

Lemma 8.3.9: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$ t.c. $A \geq 0$, allora vale $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.*

Dimostrazione. Sappiamo già dalla Proposizione 8.3.2 (3) che $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Ora sia $\lambda < 0$, allora

$$\|(\lambda - A)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\lambda(Ax \cdot x) \geq \lambda^2\|x\|^2$$

quindi $\lambda - A$ è fortemente iniettivo, ossia (per la Proposizione 6.4.5) $\lambda - A$ è iniettivo e con immagine chiusa. Quindi dalla Proposizione 8.3.2 (1) si ha

$$\mathrm{Ran}(\lambda - A) = \overline{\mathrm{Ran}}(\lambda - A) = \mathrm{Ker}(\lambda - A)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$$

da cui segue che $\lambda - A \in GL(H)$, ossia $\lambda \notin \sigma(A)$. Di conseguenza si ha la tesi per l'arbitrarietà di $\lambda < 0$. □

Definizione 8.3.10: Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Chiamiamo *valutazione inferiore* di A il numero

$$m_A = \inf_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x)$$

e *valutazione superiore* di A il numero

$$M_A = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x).$$

Proposizione 8.3.11: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$, vale $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$ e $m_A, M_A \in \sigma(A)$. In particolare se $A \geq 0$ si ha $\mathbf{r}(A) = M_A$.*

Dimostrazione. Sia $t < m_A$, vale

$$(Ax \cdot x) \geq m_A \|x\|^2$$

dunque $A - m_A \geq 0$ ed in particolare

$$\frac{1}{m_A - t}(A - m_A) \geq 0$$

quindi $-1 \notin \sigma\left(\frac{1}{m_A - t}(A - m_A)\right)$, cioè $t - m_A \notin \sigma(A - m_A)$ o ancora $t \notin \sigma(A)$. Di conseguenza $\sigma(A) \subset [m_A, +\infty)$ per l'arbitrarietà di $t < m_A$. In modo totalmente analogo si ottiene che $\forall t > M_A$ si ha $t \notin \sigma(A)$ e quindi che $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$.

Dalla Proposizione 8.3.7 sappiamo che almeno uno tra $\|A\|_{\mathrm{op}}$ e $-\|A\|_{\mathrm{op}}$ appartiene a $\sigma(A)$. Ora se $A \geq 0$ allora $\sigma(A) \subset [m_A, M_A] \subset [0, +\infty)$ e quindi necessariamente $M_A = \|A\|_{\mathrm{op}} \in \sigma(A)$ (perché necessariamente $\|A\|_{\mathrm{op}} \in \sigma(A)$, dunque $\|A\|_{\mathrm{op}} \leq M_A$ ed in modo ovvio si ha anche $M_A \leq \|A\|_{\mathrm{op}}$). Altrimenti prendiamo $c > 0$ t.c. $A + c \geq 0$ allora $M_{A+c} = M_A + c \in \sigma(A + c)$ da cui segue $M_A \in \sigma(A)$. Analogamente considerando $-A$ si ottiene anche che $m_A \in \sigma(A)$. □

Corollario 8.3.12: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Vale $A \geq 0$ se e solo se $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.*

Dimostrazione. Nel Lemma 8.3.9 abbiamo già provato che se $A \geq 0$ allora $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$. Ora supponiamo $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$. Dalla Proposizione 8.3.11 si ha $m_A \in \sigma(A)$, dunque $m_A \geq 0$ e quindi la tesi. □

Passiamo adesso a trattare il caso di operatori simmetrici compatti, in particolare vedremo il fondamentale Teorema di Hilbert-Schmidt per l'esistenza di una base hilbertiana di autovettori. Tale teorema è molto utile in fisica matematica, soprattutto nell'ambito della meccanica quantistica. Successivamente studieremo alcune proprietà dello spettro di un operatore simmetrico compatto. Nel seguito $L_C^{sim}(H)$ sarà lo spazio degli operatori simmetrici e compatti su H.

Lemma 8.3.13: *Siano $A \in \mathrm{L}_C^{sim}(H)$, e $H_0 \subset H$, $H_0 \neq \{0\}$, un sottospazio lineare chiuso e A-invariante. Allora A ha un autovettore non nullo in H_0.*

Dimostrazione. Se fosse $H_0 \subset \mathrm{Ker}(A)$ allora, essendo $H_0 \neq \{0\}$, 0 sarebbe autovalore per A e quindi ci sarebbe un autovettore non nullo per l'autovalore 0. Supponiamo quindi $H_0 \not\subset \mathrm{Ker}(A)$. Vale $A_0 = A_{|H_0} \in \mathrm{L}_C^{sim}(H_0)$, dunque per la Proposizione 8.3.7 vale che uno tra $\|A_0\|_{\mathrm{op}}$ e $-\|A_0\|_{\mathrm{op}}$ è autovalore per A_0 ($\|A_0\|_{\mathrm{op}} \neq 0$ perché $A_0 \neq 0$ in quanto $H_0 \not\subset \mathrm{Ker}(A)$) *(è esattamente in questo punto che entra in gioco la compattezza, in particolare stiamo usando la Proposizione 8.2.11 (2))*, dunque esiste un autovettore $e_0 \in H_0 \setminus \{0\}$ per A_0 e quindi per A. □

Teorema 8.3.14 (di Hilbert-Schmidt): *Sia $A \in \mathrm{L}_C^{sim}(H)$, $A \neq 0$. Allora esiste una base hilbertiana di H fatta di autovettori di A.*

Dimostrazione. Un sistema ortonormale massimale $\mathscr{B}$ tra quelli fatti di autovettori esiste per il Lemma di Zorn. Il sistema ortonormale di autovettori massimale $\mathscr{B}$ è però una base hilbertiana per H, infatti se così non fosse si avrebbe

$$H_0 = \overline{\mathrm{span}}(\mathscr{B}) \subsetneq H$$

e questo implicherebbe $H_0^\perp \neq \{0\}$. Ma allora $H_0^\perp$ sarebbe un sottospazio lineare chiuso, non banale e A-invariante, quindi per il Lemma 8.3.13 A avrebbe un autovettore non nullo in $H_0^\perp$. Tale autovettore sarebbe per costruzione ortogonale a $\mathscr{B}$, dunque $\mathscr{B}$ non sarebbe massimale, assurdo. □

Definizione 8.3.15: Sia $A \in \mathrm{L}_C^{sim}(H)$. Possiamo indicizzare gli autovalori non nulli di A in modo monotono scrivendo

$$\lambda_{-1}(A) \leq \lambda_{-2}(A) \leq \ldots \leq \lambda_{-n}(A) \leq \ldots \leq 0 \leq \ldots \leq \lambda_n(A) \leq \ldots \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_1(A)$$

e sia $I_A \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ l'insieme degli indici di tale ordinamento. Chiameremo tale ordinamento *ordinamento di Courant*.

Osservazione 8.3.16: Per ogni $\lambda \in \sigma_{av}(A)$ vale $|\{i \in I_A \mid \lambda_i(A) = \lambda\}| = m_a(\lambda, A)$ e $\max\{\lambda_1(A), -\lambda_{-1}(A)\} = \|A\|_{\mathrm{op}}$ (l'ultimo fatto segue dalla Proposizione 8.3.7).

Teorema 8.3.17 (Principio min-max di Courant): *Sia $A \in \mathrm{L}_C^{sim}(H)$ ed indicizziamo gli autovalori non nulli di A secondo l'ordinamento di Courant: $\sigma_{av}(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_i(A)\}_{i \in I_A}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $n \in I_A$ si ha*

$$\lambda_n(A) = \min_{\substack{E \subset H \\ E \text{ ssp. ch.} \\ \mathrm{codim}(E) < n}} \max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x) = \max_{\substack{F \subset H \\ F \text{ ssp. ch.} \\ \dim(F) \geq n}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x)$$

mentre se $-n \in I_A$ si ha

$$\lambda_{-n}(A) = \max_{\substack{E \subset H \\ E \text{ ssp. ch.} \\ \mathrm{codim}(E) < n}} \min_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x) = \min_{\substack{F \subset H \\ F \text{ ssp. ch.} \\ \dim(F) \geq n}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x)$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che basta dimostrare le formule per $\lambda_n(A)$ con $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \in I_A$, le altre seguono dal fatto che $\lambda_{-n}(A) = \lambda_n(-A)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $-n \in I_A$. Fissiamo $\{e_i\}_{i \in I_A} \subset H$ autovettori di A con e_i autovettore per l'autovalore $\lambda_i(A)$ per ogni $i \in I_A$, se $\lambda_i(A) = \lambda_j(A)$ scegliamo $e_i \neq e_j$. Sia $E_0 = \{0\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $n \in I_A$ sia

$$E_n = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$$

allora $E_n^\perp = \overline{\mathrm{span}}(\{e_i \mid i \in I_A \setminus \{1, \ldots, n\}\})$. Ora $A_{|E_n} = \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)) : E_n \to E_n$ e $A_{|E_n^\perp} = \mathrm{diag}(\{\lambda_i(A)\}_{i \in I_A \setminus \{1,\ldots,n\}}) : E_n^\perp \to E_n^\perp$ ed inoltre $\lambda_n(A)$ è il minimo autovalore di $A_{|E_n}$ ed il massimo autovalore di $A_{|E_{n-1}^\perp}$, dunque

$$\lambda_n(A) = \min_{\substack{x \in E_n \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x) = \max_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x).$$

D'altra parte, se $E \subset H$ è sottospazio lineare chiuso di $\mathrm{codim}(E) < n$ oppure se $F \subset H$ è sottospazio lineare chiuso di $\dim(F) \geq n$, vale

$$E_n \cap E \neq \{0\} \ \text{ e } \ E_{n-1}^\perp \cap F \neq \{0\}$$

in quanto $\dim(E_n) = n$ e $\mathrm{codim}(E) < n$ mentre $\mathrm{codim}(E_{n-1}^\perp) = n-1$ e $\dim(F) \geq n$. Quindi vi sono elementi $x_0 \in E_n \cap E$ e $y_0 \in E_{n-1}^\perp \cap F$ con $\|x_0\|, \|y_0\| = 1$ e vale

$$\sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x) \overset{x_0 \in E}{\geq} (Ax_0 \cdot x_0) \overset{x_0 \in E_n}{\geq} \min_{\substack{x \in E_n \\ \|x\|=1}} (Ax \cdot x) = \lambda_n(A)$$

da cui

$$\inf_{\substack{E\subset H\\ E \text{ ssp. ch.}\\ \operatorname{codim}(E)<n}} \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \geq \lambda_n(A) = \max_{\substack{x\in E_{n-1}^{\perp}\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \geq \inf_{\substack{E\subset H\\ E \text{ ssp. ch.}\\ \operatorname{codim}(E)<n}} \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x)$$

e similmente vale

$$\inf_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \overset{y_0\in F}{\leq} (Ay_0\cdot y_0) \overset{y_0\in E_{n-1}^{\perp}}{\leq} \max_{\substack{x\in E_{n-1}^{\perp}\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) = \lambda_n(A)$$

da cui

$$\sup_{\substack{F\subset H\\ F \text{ ssp. ch.}\\ \dim(F)\geq n}} \inf_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \leq \lambda_n(A) = \min_{\substack{x\in E_n\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \leq \sup_{\substack{F\subset H\\ F \text{ ssp. ch.}\\ \dim(F)\geq n}} \inf_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x).$$

Abbiamo quindi dimostrato le uguaglianze

$$\lambda_n(A) = \sup_{\substack{F\subset H\\ F \text{ ssp. ch.}\\ \dim(F)\geq n}} \inf_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) = \min_{\substack{x\in E_n\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x)$$

$$\lambda_n(A) = \sup_{\substack{F\subset H\\ F \text{ ssp. ch.}\\ \dim(F)\geq n}} \inf_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) = \min_{\substack{x\in E_n\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x)$$

per ogni $n\in\mathbb{N}_+$ t.c. $n\in I_A$, che ci danno la tesi. □

Corollario 8.3.18 (Principio degli autovalori intervallati): *Sian $A\in \mathrm{L}_C^{sim}(H)$ e $H_0\subset H$ iperpiano chiuso con immersione $J_0 : H_0 \hookrightarrow H$ e proiettore ortogonale $P_0 : H \to H_0$ (osserviamo che $P_0 = J_0^*$). Sia $A_0 = P_0AJ_0 \in \mathrm{L}_C^{sim}(H_0)$ (è simmetrico perché $J_0^* = P_0$). Allora per ogni $n\in\mathbb{N}_+$ t.c. $n\in I_A$ vale*

$$\lambda_{n+1}(A) \leq \lambda_n(A_0) \leq \lambda_n(A)$$

ed analogamente se $-n\in I_A$ vale

$$\lambda_{-n}(A) \leq \lambda_{-n}(A_0) \leq \lambda_{-n-1}(A).$$

Dimostrazione. Valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(A) &= \min_{\substack{E\subset H\\ E \text{ ssp. ch.}\\ \operatorname{codim}(E)<n+1}} \max_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \leq \min_{\substack{E\subset H_0\\ E \text{ ssp. ch.}\\ \operatorname{codim}(E)<n}} \max_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) = \lambda_n(A_0)\\ &= \max_{\substack{F\subset H_0\\ F \text{ ssp. ch.}\\ \dim(F)\geq n}} \min_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) \leq \max_{\substack{F\subset H\\ F \text{ ssp. ch.}\\ \dim(F)\geq n}} \min_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (Ax\cdot x) = \lambda_n(A)\end{aligned}$$

dunque si ha quanto voluto nel caso in cui $n\in I_A$. Il caso in cui $-n\in I_A$ segue da quello già provato osservando che $\lambda_{-n}(A) = \lambda_n(-A)$. □

8.4 Calcolo Funzionale per Operatori Simmetrici

Definizione 8.4.1: Siano X spazio di Banach complesso, $A\in \mathrm{L}(X)$ e $p\in\mathbb{C}[x]$. Se $p(x) = \sum_{j=1}^n a_jx^j$, con $a_n\neq 0$, definiamo

$$p(A) = \sum_{j=1}^n a_jA^j.$$

Teorema 8.4.2 (della mappa spettrale): *Siano X spazio di Banach complesso, $A \in \mathrm{L}(X)$ e $p \in \mathbb{C}[x]$. Allora $p(A) \in \mathrm{L}(X)$ e vale $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Fattorizzando il polinomio $p(x) - \lambda$, con $p(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^j$, $a_n \neq 0$, si trova

$$p(x) - \lambda = a_n \prod_{j=0}^{n} (x - \mu_j)$$

in cui $p(\mu) = \lambda$ se e solo se $\exists j \in \{1, ..., n\}$ t.c. $\mu = \mu_j$ ($\{\mu_j\}_{j=1,...,n} = p^{-1}(\lambda)$). Quindi

$$p(A) - \lambda = a_n \prod_{j=1}^{n} (A - \mu_j)$$

che è omeomorfismo lineare se e solo se lo sono tutti gli $A - \mu_j$ per $j \in \{1, ..., n\}$. Dunque $\lambda \in \sigma(p(A)) \iff p(A) - \lambda \notin \mathrm{GL}(X) \iff \exists j \in \{1, ..., n\}$ t.c. $A - \mu_j \notin \mathrm{GL}(X) \iff \exists j \in \{1, ..., n\}$ t.c. $\mu_j \in \sigma(A) \iff p^{-1}(\lambda) \cap \sigma(A) \neq \emptyset \iff \lambda \in p(\sigma(A))$. Quindi si ha la tesi. □

Fissiamo H spazio di Hilbert complesso con prodotto hermitiano $(. \cdot .)$ e norma indotta $\|.\|_H$.

Osservazione 8.4.3: Siano $p \in \mathbb{C}[x]$ e $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Presi $x, y \in H$ si ha

$$\begin{aligned}(p(A)x \cdot y) &= \sum_{j=1}^{n} a_j (A^j x \cdot y) = \sum_{j=1}^{n} a_j (x \cdot A^j y) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (x \cdot \overline{a_j} A^j y) = (x \cdot \overline{p}(A) y)\end{aligned}$$

in cui $p(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^j$, $a_n \neq 0$. Quindi vale

$$p(A)^* = \overline{p}(A).$$

Corollario 8.4.4: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Allora preso $p \in \mathbb{C}[x]$ si ha*

$$\|p(A)\|_{op} = \|p\|_{\infty, \sigma(A)}.$$

Dimostrazione. Grazie al Teorema 8.4.2 della mappa spettrale, all'Osservazione 8.4.3, al fatto che $p(A)^* p(A) \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$ e al fatto che $p(A)^* p(A) \geq 0$ si ha (ricordando la Proposizione 8.3.11)

$$\begin{aligned}\|p(A)\|_{\mathrm{op}}^2 &= \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H = 1}} (p(A)x \cdot p(A)x) \\ &= \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H = 1}} (p(A)^* p(A) x \cdot x) \\ &= M_{p(A)^* p(A)} = \|p(A)^* p(A)\|_{\mathrm{op}} \\ &= \|\overline{p}(A) p(A)\|_{\mathrm{op}} = \|(\overline{p} p)(A)\|_{\mathrm{op}} \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma((\overline{p} p)(A))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(\overline{p} p)(\lambda)| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{p}(\lambda) p(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|^2 \\ &= \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)| \right)^2 = \|p\|_{\infty, \sigma(A)}^2.\end{aligned}$$

□

Definizione 8.4.5: Dato un sottoinsieme $S \subset \mathbb{C}$ definiamo

$$\Pi_S = \{\text{Funzioni polinomiali } S \to \mathbb{C}\}.$$

In cui per funzione polinomiale si intende la funzione indotta da un polinomio di $\mathbb{C}[x]$.

Osservazione 8.4.6: Nel contesto della definizione precedente, lo spazio Π_S con l'operazione di somma e di prodotto (tra i rispettivi polinomi di due funzioni polinomiali in Π_S) forma un algebra di funzioni. Inoltre se S è compatto è possibile dare a Π_S una struttura di spazio normato con la norma $\|.\|_{\infty,S}$.

Osservazione 8.4.7: Per riportare alla memoria quel che riguarda la differenza tra polinomi e funzioni polinomiali, ricordiamo ad esempio che se S è finito la funzione polinomiale su S associata ad un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$, può essere la funzione nulla.

Lemma 8.4.8: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Allora esiste un omomorfismo di algebre isometrico*

$$\Pi_{\sigma(A)} \xrightarrow{\varphi_A} \mathrm{L}(H)$$

t.c. $\varphi_A(p) = p(A)$ $\forall p \in \Pi_{\sigma(A)}$. Inoltre se $p \in \mathbb{R}[x]$ si ha $p(A) \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$.

Dimostrazione. Il fatto che sia un omomorfismo di algebre è una banale verifica. Vediamo che è isometrico. Sia $p \in \Pi_{\sigma(A)}$, grazie al Corollario 8.4.4, possiamo scrivere

$$\|p(A)\|_{\mathrm{op}} = \|p\|_{\infty,\sigma(A)}$$

che è quanto voluto. L'ultima affermazione segue dalle seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}(p(A)x \cdot y) &= \sum_{j=1}^{n} a_j(A^j x \cdot y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x \cdot A^j y)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(x \cdot a_j A^j y) = (x \cdot p(A)y)\end{aligned}$$

in cui $x, y \in H$ e $p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ con $\{a_j\}_{j=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. □

Teorema 8.4.9 (Calcolo funzionale continuo per operatori simmetrici): *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Esiste un unico omomorfismo continuo di algebre*

$$\Phi_A : C^0(\sigma(A), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}(H)$$

t.c. $\Phi_A(\mathrm{Id}_{\sigma(A)}) = A$. Inoltre, indicando $f(A) = \Phi_A(f)$, si ha:

(1) Φ_A è isometrico ed ha immagine $\overline{\mathbb{C}[A]}^{op}$ (chiusura nella norma operatoriale di $\mathbb{C}[A] = \varphi_A(\Pi_{\sigma(A)})$);

(2) se $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{R})$ t.c. $f \geq 0$ su $\sigma(A)$, allora $f(A) \geq 0$;

(3) se $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{R})$ si ha $f(A) \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$;

(4) $\overline{f}(A) = f(A)^*$ per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$;

(5) se $B \in \mathrm{L}(H)$ e $AB = BA$ allora $f(A)B = Bf(A)$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Stone $\Pi_{\sigma(A)}$ è uniformemente denso in $C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ (ricordiamo che $\sigma(A)$ è compatto), dunque essendo φ_A omomorfismo di algebre isometrico, si estende per densità ad un omomorfismo di algebre isometrico Φ_A che soddisfa $\Phi_A(\mathrm{Id}_{\sigma(A)}) = A$. Questo dimostra l'esistenza dell'omomorfismo ed il punto (1).

Vediamo il punto (2). Se $p \in \mathbb{C}[x]$ con $p \geq 0$ su $\sigma(A)$ allora $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) \subset [0, +\infty)$, che significa $p(A) \geq 0$ (grazie al Corollario 8.3.12) e questo si estende anche alla chiusura. Infatti se $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ t.c. $f \geq 0$, allora esiste $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Pi_{\sigma(A)}$ t.c. $p_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $p_k \to f$ uniformemente su $\sigma(A)$ (in quanto se $(q_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Pi_{\sigma(A)}$ sono t.c. $q_k \to f$ uniformemente su $\sigma(A)$, allora definendo $p_k = q_k + \|f - q_k\|_{\infty, \sigma(A)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha che anche $p_k \to f$ uniformemente su $\sigma(A)$ e $p_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$) e di conseguenza anche $f(A) \geq 0$.

Per quanto riguarda il punto (3) notiamo che se $f \in \mathbb{C}^0(\sigma(A), \mathbb{R})$ questa può essere approssimata uniformemente su $\sigma(A)$ con polinomi $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tutti a coefficienti reali (per il Teorema di Stone reale) e, grazie al Lemma 8.4.8, vale $p_k(A) \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e di conseguenza anche $f(A) \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$.

Vediamo adesso il punto (4). Siano $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ e $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[x]$ t.c. $p_k \to f$ uniformemente su $\sigma(A)$, allora presi $x, y \in H$, grazie all'Osservazione 8.4.3, si ha

$$(p_k(A)x \cdot y) = (x \cdot \overline{p_k}(A)y) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

ma $\overline{p_k} \to \overline{f}$ uniformemente su $\sigma(A)$, dunque segue che

$$(f(A)x \cdot y) = (x \cdot \overline{f}(A)y) \;\; \forall x, y \in H$$

da cui segue $f(A)^* = \overline{f}(A)$.

Anche (5) segue per approssimazione notando che se $B \in \mathrm{L}(H)$ commuta con A e $p \in \mathbb{C}[x]$ si ha che anche $p(A)$ commuta con B.

Resta da dimostrare soltanto l'unicità. Sia $\Psi : C^0(\sigma(A)) \to \mathrm{L}(H)$ omomorfismo continuo di algebre t.c. $\Psi(\mathrm{Id}_{\sigma(A)}) = A$. Allora Ψ è determinata su tutto $\Pi_{\sigma(A)}$, infatti se $p \in \mathbb{C}[x]$, $p(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^j$, si ha

$$\Psi(p) = \Psi\left(\sum_{j=1}^n a_j [\mathrm{Id}_{\sigma(A)}]^j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \Psi(\mathrm{Id}_{\sigma(A)})^j = p(A),$$

dunque, essendo Ψ continua, è determinata su tutta la chiusura uniforme di $\Pi_{\sigma(A)}$, cioè su $C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$, ed è uguale a Φ_A. □

Osservazione 8.4.10: Nel contesto del teorema precedente lo spazio $\overline{\mathbb{C}[A]}^{op}$ corrisponde all'algebra chiusa generata da A in $\mathrm{L}(H)$.

Ricordiamo il fondamentale Teorema di Riesz-Markov per funzionali continui.

Teorema 8.4.11 (di Riesz-Markov per funzionali lineari continui): *Siano X spazio topologico localmente compatto di Hausdorff ed $L : C_c^0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare continuo. Allora esiste un'unica misura con segno di Radon finita $\nu_L : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ t.c.*

$$Lf = \int_X f \, d\nu_L \;\; \forall f \in C_c^0(X, \mathbb{R}).$$

Osservazione 8.4.12 (Misure complesse e integrali rispetto ad una misura complessa): (Utile per capire il seguito) Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Una

Una *misura complessa* su $(X, \mathcal{M})$ è una funzione d'insieme $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ t.c.

(1) $\nu(\emptyset) = 0$;

(2) per ogni famiglia disgiunta $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ si ha

$$\nu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(F_j)$$

in cui la serie nel RHS converge assolutamente in $\mathbb{C}$.

Non è complicato dimostrare che la parte reale e la parte immaginaria di una misura complessa sono due misure con segno finite (le parti reali ed immaginarie di una serie convergente assolutamente in $\mathbb{C}$ sono convergenti assolutamente in $\mathbb{R}$), quindi se $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, possiamo prendere le decomposizioni di Jordan delle due misure con segno finite ν_1 e ν_2

$$\nu_1 = \nu_1^+ - \nu_1^-$$

$$\nu_2 = \nu_2^+ - \nu_2^-$$

con $\nu_1^+, \nu_1^-, \nu_2^+, \nu_2^-$ misure positive finite, per ottenere la decomposizione di ν

$$\nu = (\nu_1^+ - \nu_1^-) + i(\nu_2^+ - \nu_2^-)$$

dunque a questo punto viene naturale definire per $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile

$$\int_X f\, d\nu = \left[\int_X f\, d\nu_1^+ - \int_X f\, d\nu_1^-\right] + i\left[\int_X f\, d\nu_2^+ - \int_X f\, d\nu_2^-\right]$$

e quindi per $f = u + iv : X \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabile

$$\int_X f\, d\nu = \int_X u\, d\nu + i\int_X v\, d\nu.$$

Per $f = u + iv : X \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabile possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\nu = &\left[\int_X u\, d\nu_1^+ - \int_X u\, d\nu_1^-\right] + i\left[\int_X u\, d\nu_2^+ - \int_X u\, d\nu_2^-\right]\\ &+ i\left[\int_X v\, d\nu_1^+ - \int_X v\, d\nu_1^-\right] - \left[\int_X v\, d\nu_2^+ - \int_X v\, d\nu_2^-\right]\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}\overline{\int_X f\, d\nu} &= \left[\int_X u\, d\nu_1^+ - \int_X u d\nu_1^-\right] - i\left[\int_X u\, d\nu_2^+ - \int_X u\, d\nu_2^-\right]\\ &- i\left[\int_X v\, d\nu_1^+ - \int_X v\, d\nu_1^-\right] - \left[\int_X v\, d\nu_2^+ - \int_X v\, d\nu_2^-\right]\\ &= \left[\int_X u\, d\nu_1^+ - \int_X u\, d\nu_1^-\right] - i\left[\int_X u\, d\nu_2^+ - \int_X u\, d\nu_2^-\right]\\ &- i\left(\left[\int_X v\, d\nu_1^+ - \int_X v\, d\nu_1^-\right] - \left[\int_X v\, d\nu_2^+ - i\int_X v\, d\nu_2^-\right]\right)\\ &= \int_X u\, d\overline{\nu} - i\int_X v\, d\overline{\nu} = \int_X \overline{f}\, d\overline{\nu}.\end{aligned}$$

Inoltre ricordiamo il seguente risultato tecnico che ci sarà utile nel seguito.

Proposizione 8.4.13: *Sia X uno spazio metrico localmente compatto separabile e μ una misura boreliana finita su X. Allora per ogni $S \in \mathcal{B}(X)$ vale*

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \sup\{\mu(K) \mid K \subset S \text{ compatto}\}\\ &= \inf\{\mu(\Omega) \mid \Omega \supset S \text{ aperto}\}.\end{aligned}$$

Teorema 8.4.14: *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Esiste un'unica mappa sesquilineare*

$$m_A : H \times H \to \{\nu : \mathcal{B}(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \nu \text{ misura complessa}\}$$

t.c. per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ e per ogni $x, y \in H$ valga

$$(f(A)x \cdot y) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{xy}(\lambda)$$

in cui si è indicato $m_A(x, y) = \mu_{xy}$. Inoltre:

(1) per ogni $x, y \in H$, indicando con $I_{\mu_{xy}}$ il funzionale integrale associato a μ_{xy}, vale

$$\|I_{\mu_{xy}}\|_* \leq \|x\|_H \|y\|_H;$$

(2) per ogni $x, y \in H$ vale $\mu_{yx} = \overline{\mu_{xy}}$;

(3) per ogni $x \in H$, indicando con $\mu_x = \mu_{xx}$, si ha che μ_x è una misura (positiva) finita e boreliana, inoltre vale

$$\|I_{\mu_x}\|_* = \|x\|_H^2;$$

(4) se $B \in \mathrm{L}(H)$ è t.c. $AB = BA$ allora $\mu_{(Bx)y} = \mu_{x(B^*y)}$ per ogni $x, y \in H$.

Dimostrazione. (In classe solo accennata) L'esistenza e l'unicità della mappa sesquilineare segue dal Teorema 8.4.11 di Riesz-Markov per funzionali lineari continui notando che essendo $\sigma(A)$ compatto, vale $C^0_c(\sigma(A), \mathbb{C}) = C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$, che $C^0(\sigma(A), \mathbb{C}) = C^0(\sigma(A), \mathbb{R}) + iC^0(\sigma(A), \mathbb{R})$ e che se ν_1, ν_2 sono due misure con segno finite la funzione $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ è una ben definita misura complessa. Inoltre vale

$$|(f(A)x \cdot y)| \leq \|f(A)\|_{\mathrm{op}} \|x\|_H \|y\|_H = \|f\|_{\infty, \sigma(A)} \|x\|_H \|y\|_H \quad \forall x, y \in H$$

da cui segue (1).

Il punto (2) segue dalla sesquilinearità del prodotto hermitiano su H e dal fatto che $I_{\overline{\mu_{xy}}} = \overline{I_{\mu_{xy}}}$ per ogni $x, y \in H$.

Fissiamo ora $x \in H$. Dimostriamo la prima parte del punto (3). Iniziamo ricordando che, per il Teorema 8.4.9 (2), se $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{R})$, $f \geq 0$, si ha $f(A) \geq 0$. In particolare essendo

$$[0, +\infty) \ni (f(A)x \cdot x) = \int_{\sigma(A)} f\, d\mu_x = \int_{\sigma(A)} f\, d\mathrm{Re}(\mu_x) + i \int_{\sigma(A)} f\, d\mathrm{Im}(\mu_x)$$

deve succedere $\int_{\sigma(A)} f\, d\mathrm{Im}(\mu_x) = 0$. Dovendo valere questo per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{R})$, $f \geq 0$, si ha necessariamente $\mathrm{Im}(\mu_x) = 0$. Quindi $\mu_x = \mathrm{Re}(\mu_x)$, dunque è una misura con segno finita. Vediamo che in realtà è una misura positiva finita. Se la decomposizione di Jordan di μ_x fosse $\mu_x = \mu_x^+ - \mu_x^-$ con $\mu_x^- \neq 0$ si avrebbe l'esistenza di un $S \subset \sigma(A)$ boreliano t.c $\mu_x^-(S) > 0$ e possiamo supporre $\mu_x^+(S) = 0$ in quanto le due misure della decomposizione di Jordan sono mutualmente singolari. Ora μ_x^+ e μ_x^- sono misure boreliane finite, in particolare sono di Radon, dunque

$$\begin{aligned}\mu_x^-(S) &= \sup\{\mu_x^-(K) \mid K \subset S \text{ compatto}\}\\ &= \inf\{\mu_x^-(\Omega) \mid \Omega \supset S \text{ aperto}\}\end{aligned}$$

e

$$0 = \mu_x^+(S) = \inf\{\mu_x^+(\Omega) \mid \Omega \supset S \text{ aperto}\}$$

quindi esistono un compatto $K \subset S$ ed un aperto $\Omega \supset S$ di $\sigma(A)$ t.c. $\mu_x^-(K) > 0$ e $\max\{\mu_x^-(\Omega \setminus K), \mu_x^+(\Omega)\} < \frac{\mu_x^-(K)}{2}$. Infatti non è difficile notare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $K_\varepsilon \subset S$ compatto e $S \subset \Omega_\varepsilon$ aperto t.c. $\max\{\mu_x^-(\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon), \mu_x^+(\Omega_\varepsilon)\} < \varepsilon$; scegliamo $K' \subset S$ compatto t.c. $\mu_x^-(K') > 0$ e fissiamo $\varepsilon = \frac{\mu_x^-(K')}{2}$, allora si ha l'esistenza di un $K'' \subset S$ compatto e di un aperto $\Omega \supset S$ t.c.

$$\max\{\mu_x^-(\Omega \setminus K''), \mu_x^+(\Omega)\} < \frac{\mu_x^-(K')}{2}$$

ma allora preso $K = K' \cup K''$ si ha $K \subset S$, $\mu_x^-(K) > 0$ e

$$\max\{\mu_x^-(\Omega \setminus K), \mu_x^+(\Omega)\} \leq \max\{\mu_x^-(\Omega \setminus K''), \mu_x^+(\Omega)\} < \frac{\mu_x^-(K')}{2} \leq \frac{\mu_x^-(K)}{2}.$$

Allora per il Teorema di Urysohn esiste una funzione $\gamma \in C^0(\sigma(A), [0,1])$ t.c. $\operatorname{supp}(\gamma) \subset \Omega$ e $\gamma = 1$ su K, e si ha

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(A)} \gamma \, d\mu_x &= \int_K \gamma \, d\mu_x + \int_{\Omega \setminus K} \gamma \, d\mu_x\\ &= -\mu_x^-(K) + \int_{\Omega \setminus K} \gamma \, d\mu_x\\ &\leq -\mu_x^-(K) + \mu_x(\Omega \setminus K)\\ &\leq -\mu_x^-(K) + \mu_x^+(\Omega) + \mu_x^-(\Omega \setminus K) < 0\end{aligned}$$

che è un assurdo in quanto $\gamma \geq 0$ (quindi l'integrale dovrebbe essere non negativo per quanto detto in precedenza nella dimostrazione). Dunque effettivamente $\mu_x^- = 0$. Invece per la seconda parte del punto (3) basta tenere a mente il punto (1) e considerare f costante 1 su tutto $\sigma(A)$ per ottenere l'uguaglianza.

Infine vediamo il punto (4). Se $B \in \mathrm{L}(H)$ commuta con A allora, per il Teorema 8.4.9 (5), si ha $f(A)B = Bf(A)$ per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$, ma quindi

$$\int_{\sigma(A)} f \, d\mu_{(Bx)y} = (f(A)Bx \cdot y) = (Bf(A)x \cdot y) = (f(A)x \cdot B^* y) = \int_{\sigma(A)} f \, d\mu_{x(B^* y)}$$

per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ e per ogni $x, y \in H$. Di conseguenza si ha $\mu_{(Bx)y} = \mu_{x(B^* y)}$ per ogni $x, y \in H$. □

Definizione 8.4.15: Nel contesto del Teorema precedente, presi $x, y \in H$, la misura complessa $m_A(x,y) = \mu_{xy}$ è chiamata *misura spettrale* di A associata ai vettori x ed y.

Definizione 8.4.16: Sia Σ uno spazio topologico e sia $\mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni boreliane limitate $\Sigma \to \mathbb{C}$. Diciamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ converge ad f nella *convergenza puntuale dominata* su Σ se $f_k \to f$ puntualmente su Σ ed $\exists M > 0$ t.c. $|f_k| \leq M$ su Σ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 8.4.17: *Sia Σ uno spazio metrico. Se $\mathscr{A} \subset \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ è una sottoalgebra di funzioni che contiene $C_b^0(\Sigma, \mathbb{C})$ chiusa per convergenza puntuale dominata su Σ, allora necessariamente è $\mathscr{A} = \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Passo 1: *Sia $\mathscr{A} \subset \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ una sottoalgebra chiusa per convergenza puntuale dominata su Σ, dimostriamo che $\mathscr{F} = \{S \subset \Sigma \mid \mathbb{1}_S \in \mathscr{A}\}$ è una σ-algebra.*

Ovviamente $\Sigma \in \mathscr{F}$ in quanto $\mathbb{1}_\Sigma \in \mathscr{A}$ (è l'1 dell'algebra). Se $S \in \mathscr{F}$, allora $\mathbb{1}_{S^c} = \mathbb{1}_\Sigma - \mathbb{1}_S \in \mathscr{A}$, dunque $S^c \in \mathscr{F}$. Se $S, D \in \mathscr{F}$, allora $\mathbb{1}_{S\cap D} = \mathbb{1}_S \mathbb{1}_D \in \mathscr{A}$, da cui $S \cap D \in \mathscr{F}$. Quindi $\mathscr{F}$ è un'algebra di insiemi. Adesso facciamo vedere che se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{F}$. Osserviamo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=0}^n E_m$, dunque possiamo supporre E_n decrescente per l'inclusione. Sia $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathbb{1}_{E_n} \le 1$ su Σ e $\mathbb{1}_{E_n} \longrightarrow \mathbb{1}_E$ puntualmente su Σ, ossia $\mathbb{1}_{E_n} \longrightarrow \mathbb{1}_E$ nella convergenza puntuale dominata e ciò prova che $\mathbb{1}_E \in \mathscr{A}$ e quindi che $E \in \mathscr{F}$.

Passo 2: *Fissiamo $\mathscr{A} \subset \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ una sottoalgebra chiusa per convergenza puntuale dominata su Σ che contiene $C_b^0(\Sigma, \mathbb{C})$. Dimostriamo che $\mathscr{A}$ contiene le caratteristiche dei chiusi di Σ.*

Sia $F \subset \Sigma$ chiuso. Se $F = \Sigma$ allora $\mathbb{1}_\Sigma \in \mathscr{A}$ (perché è l'1 dell'algebra) . Supponiamo quindi $F \subsetneq \Sigma$. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$F_n = \{x \in \Sigma \ \mid \operatorname{dist}(x, F) \ge 2^{-n}\}$$

e la funzione

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, F_n)}{\operatorname{dist}(F) + \operatorname{dist}(F_n)} \quad \forall x \in \Sigma$$

allora $f_n \in C_b^0(\Sigma, \mathbb{C})$ ed anzi $|f_n| \le 1$ su Σ, inoltre $f_n \longrightarrow \mathbb{1}_F$ puntualmente. Quindi $f_n \longrightarrow f$ nella convergenza puntuale dominata, dunque $\mathbb{1}_F \in \mathscr{A}$.

Passo 3: Essendo $\mathscr{F} = \{S \subset \Sigma \mid \mathbb{1}_S \in \mathscr{A}\}$ una σ-algebra, grazie al Passo 2 si ottiene che $\mathscr{F} \supset \mathscr{B}(\Sigma)$. Quindi $\mathscr{A}$ contiene le funzioni indicatrici dei boreliani di Σ. Per concludere la dimostrazione basta osservare che presa $f \in \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ può essere approssimata con funzioni semplici boreliane $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $|\phi_n| \le |f|$ su Σ, dunque $\phi_n \longrightarrow f$ nella convergenza puntuale dominata in Σ, dunque $f \in \mathscr{A}$. Quindi effettivamente $\mathscr{A} = \mathfrak{B}(\Sigma, \mathbb{C})$. $\square$

Definizione 8.4.18: Diciamo che una successione di operatori $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(H)$ converge ad $A \in \mathrm{L}(H)$ *nel senso debole degli operatori*, se

$$(A_k x \cdot y) \longrightarrow (Ax \cdot y) \ \ \forall x, y \in H.$$

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(H)$ converge ad $A \in \mathrm{L}(H)$ *nel senso forte degli operatori* se vi converge puntualmente.

Osservazione 8.4.19: Il limite nel senso debole degli operatori è unico.

Infatti se $A, A' \in \mathrm{L}(H)$ sono due limiti nel senso debole degli operatori di $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(H)$, allora presi comunque $x, y \in H$ si ha

$$|((A - A')x \cdot y)| = |(Ax \cdot y) - (A'x \cdot y)| = \lim_{k\to+\infty} |(A_k x \cdot y) - (A_k x \cdot y)| = 0$$

ma per il Corollario 4.1.8 si ha

$$\|A - A'\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x,y\in H \\ \|x\|_H, \|y\|_H \le 1}} |((A - A')x \cdot y)| = 0$$

da cui segue $A = A'$.

Osservazione 8.4.20: Se una successione di operatori $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(H)$ converge nel senso forte degli operatori ad $A \in \mathrm{L}(H)$ allora converge ad A anche nel senso debole degli operatori.

Infatti $A_k x \longrightarrow Ax$ in H per ogni $x \in H$ ed il prodotto hermitiano su H è continuo.

Teorema 8.4.21 (Calcolo funzionale boreliano per operatori simmetrici): *Sia $A \in \mathrm{L}^{\mathrm{sim}}(H)$. Esiste un unico omomorfismo di algebre*

$$\widehat{\Phi}_A : \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}(H)$$

con $\widehat{\Phi}_A(\mathrm{Id}_{\sigma(A)}) = A$ e sequenzialmente continuo fra la convergenza puntuale dominata su $\mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ e la convergenza nel senso debole degli operatori su $\mathrm{L}(H)$. Inoltre, se $\{\mu_{xy}\}_{x,y\in H}$ è la famiglia delle misure spettrali di A, indicando $f(A) = \widehat{\Phi}_A(f)$, si ha

(1) per ogni $f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ e per ogni $x, y \in H$ si ha

$$(f(A)x \cdot y) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{xy}(\lambda);$$

(2) $\|f(A)\|_{op} \leq \|f\|_{\infty,\sigma(A)}$ per ogni $f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$;

(3) $\overline{f}(A) = f(A)^*$ per ogni $f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$;

(4) se $B \in \mathrm{L}(H)$ è t.c. $AB = BA$ allora $f(A)B = Bf(A)$;

(5) se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ e $f_k \longrightarrow f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ nella convergenza puntuale dominata su $\sigma(A)$ allora $f_k(A) \longrightarrow f(A)$ nel senso forte degli operatori.

Dimostrazione. Vediamo prima l'unicità. Sia $\Phi : \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}(H)$ un secondo omomorfismo di algebre t.c. $\Phi(\mathrm{Id}_{\sigma(A)}) = A$ e che sia sequenzialmente continuo fra la convergenza puntuale dominata su $\mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ e la convergenza nel senso debole degli operatori su $\mathrm{L}(H)$. Grazie al Teorema 8.4.9 (in particolare al risultato di unicità che esso contiene) si ha necessariamente

$$\Phi(f) = \Phi_A(f) = \widehat{\Phi}_A(f) \ \ \forall f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$$

ossia $\mathscr{A} = \{f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C}) \mid \Phi(f) = \widehat{\Phi}_A(f)\} \supset C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$. Osserviamo che, essendo entrambi Φ e $\widehat{\Phi}_A$ omomorfismi di algebre, la famiglia $\mathscr{A}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ ed essendo entrambi Φ e $\widehat{\Phi}_A$ sequenzialmente continui fra la convergenza puntuale dominata su $\mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ e la convergenza nel senso debole degli operatori su $\mathrm{L}(H)$, $\mathscr{A}$ è chiusa per la convergenza puntuale dominata su $\sigma(A)$ (il limite nel senso debole degli operatori è unico come dimostrato nell'Osservazione 8.4.19). Quindi per il Lemma 8.4.17 si ha $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$, che prova l'unicità voluta.

Passiamo adesso all'esistenza. Per $f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$ definiamo $\widehat{\Phi}_A(f) \in \mathrm{L}(H)$ osservando che, per il Teorema 8.4.14, la forma

$$H \times H \ni (x, y) \longrightarrow \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{xy}(\lambda) = \langle I_{\mu_{xy}}, f \rangle \in \mathbb{C}$$

è sesquilineare e continua, infatti possiamo scrivere

$$|\langle I_{\mu_{xy}}, f \rangle| \leq \|I_{\mu_{xy}}\|_* \|f\|_{\infty,\sigma(A)} \leq \|f\|_{\infty,\sigma(A)} \|x\|_H \|y\|_H, \tag{8.2}$$

quindi per il Teorema 2.4.3 di Lax-Milgram resta definito un operatore $\widehat{\Phi}_A(f) \in \mathrm{L}(H)$ t.c.

$$\int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{xy}(\lambda) = (\widehat{\Phi}_A(f)x \cdot y) \ \ \forall x, y \in H$$

che è (1). In particolare, dal Teorema 8.4.14, si ha

$$(\widehat{\Phi}_A(f)x \cdot y) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{xy}(\lambda) = (\Phi_A(f)x \cdot y) = (f(A)x \cdot y)$$

per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ e per ogni $x, y \in H$, ossia

$$((\widehat{\Phi}_A(f) - \Phi_A(f))x \cdot y) = 0 \ \ \forall f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C}) \ \ \forall x, y \in H$$

ma per il Corollario 4.1.8 si ha

$$\|\widehat{\Phi}_A(f) - \Phi_A(f)\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x,y \in H \\ \|x\|_H, \|y\|_H \leq 1}} ((\widehat{\Phi}_A(f) - \Phi_A(f))x \cdot y) = 0$$

da cui segue $\widehat{\Phi}_A(f) = \Phi_A(f)$ per ogni $f \in C^0(\sigma(A), \mathbb{C})$ (in particolare $\widehat{\Phi}_A(\mathrm{Id}_{\sigma(A)}) = A$). Il punto (2) segue facilmente dalle stime nell'eq. (8.2).

Vediamo il punto (3). Sia $f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$, allora

$$\begin{aligned}
(\widehat{\Phi}_A(f)^* x \cdot y) &= (x \cdot \widehat{\Phi}_A(f)y) = \overline{(\widehat{\Phi}_A(f)y \cdot x)} \\
&= \overline{\int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{yx}(\lambda)} \\
&= \int_{\sigma(A)} \overline{f}(\lambda)\, d\overline{\mu_{yx}}(\lambda) \\
&= \int_{\sigma(A)} \overline{f}(\lambda)\, d\mu_{xy}(\lambda) = (\widehat{\Phi}_A(\overline{f})x \cdot y)
\end{aligned}$$

per ogni $x, y \in H$, dunque

$$((\widehat{\Phi}_A(f)^* - \widehat{\Phi}_A(\overline{f}))x \cdot y) = 0 \ \ \forall x, y \in H$$

ma per il Corollario 4.1.8 si ha

$$\|\widehat{\Phi}_A(f)^* - \widehat{\Phi}_A(\overline{f})\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x,y \in H \\ \|x\|_H, \|y\|_H \leq 1}} ((\widehat{\Phi}_A(f)^* - \widehat{\Phi}_A(\overline{f}))x \cdot y) = 0$$

da cui segue $\widehat{\Phi}_A(f)^* = \widehat{\Phi}_A(\overline{f})$, che è (3).

Dimostriamo il punto (4). Sia $B \in \mathrm{L}(H)$ che commuta con A ed $f \in \mathfrak{B}(\sigma(A), \mathbb{C})$. Allora

$$\begin{aligned}
(B\widehat{\Phi}_A(f)x \cdot y) &= (\widehat{\Phi}_A(f)x \cdot B^* y) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{x(B^*y)}(\lambda) \\
(\widehat{\Phi}_A(f)Bx \cdot y) &= \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_{(Bx)y}(\lambda)
\end{aligned}$$

per ogni $x, y \in H$, ma dal Teorema 8.4.14 (5) si ha $\mu_{x(B^*y)} = \mu_{(Bx)y}$, di conseguenza si ha

$$((B\widehat{\Phi}_A(f) - \widehat{\Phi}_A(f)B)x \cdot y) = 0 \ \ \forall x, y \in H$$

quindi per il Corollario 4.1.8 si ha

$$\|B\widehat{\Phi}_A(f) - \widehat{\Phi}_A(f)B\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x,y \in H \\ \|x\|_H, \|y\|_H \leq 1}} ((B\widehat{\Phi}_A(f) - \widehat{\Phi}_A(f)B)x \cdot y) = 0$$

da cui segue il punto (4).

Infine dimostriamo il punto (5). Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}(\sigma(A),\mathbb{C})$ t.c. $f_k \to f \in \mathfrak{B}(\sigma(A),\mathbb{C})$ nella convergenza puntuale dominata, sia $M > 0$ che domina le f_k (e quindi anche f). Allora preso $x \in H$, usando il punto (3) ed il fatto che $\widehat{\Phi}_A$ è un omomorfismo di algebre, si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\Phi}_A(f_k)x - \widehat{\Phi}_A(f)x\|_H^2 &= ((\widehat{\Phi}_A(f_k)x - \widehat{\Phi}_A(f)x) \cdot (\widehat{\Phi}_A(f_k)x - \widehat{\Phi}_A(f)x)) \\
&= ((\widehat{\Phi}_A(f_k) - \widehat{\Phi}_A(f))^*(\widehat{\Phi}_A(f_k) - \widehat{\Phi}_A(f))x \cdot x) \\
&= (\widehat{\Phi}_A(f_k - f)^*\widehat{\Phi}_A(f_k - f)x \cdot x) \\
&= (\widehat{\Phi}_A(\overline{f_k - f})\widehat{\Phi}_A(f_k - f)x \cdot x) \\
&= (\widehat{\Phi}_A((\overline{f_k - f})(f_k - f))x \cdot x) \\
&= (\widehat{\Phi}_A(|f_k - f|^2)x \cdot x) \\
&= \int_{\sigma(A)} |f_k - f|^2 \, d\mu_x \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

che tende a 0 per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue in quanto $f_k \to f$ puntualmente su $\sigma(A)$ e $|f_k - f|^2 \leq 4M^2 \in \mathscr{L}^1(\sigma(A),\mu_x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per l'arbitrarietà di $x \in H$ si ottiene (5) (in particolare $\widehat{\Phi}_A(f_k) \to \widehat{\Phi}_A(f)$ nel senso debole degli operatori lineari). □

9

Elementi di Teoria delle Distribuzioni

9.1 LF-spazi

Definizione 9.1.1 (LF-spazio): Un *LF-spazio* è un limite induttivo stretto di spazi di Frechét.

Proposizione 9.1.2: *Sia $X_\infty = \varinjlim^s X_n$ un LF-spazio, allora:*

(1) X_n è un sottospazio lineare chiuso di X_∞ la cui topologia coincide con la topologia di sottospazio topologico in X_∞;

(2) un $A \subset X_\infty$ è limitato in X_∞ se e solo se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $A \subset X_n$ e A è limitato in X_n;

(3) X_∞ è localmente convesso e completo;

(4) se $X_n \subsetneq X_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora X_∞ non è metrizzabile;

(5) sia Y SVT e $L : X_\infty \to Y$ lineare, allora L è continua se e solo se $L_{|X_n}$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. (1) Segue dalla Proposizione 3.7.11 (1).

(2) Segue dalla Proposizione 3.7.11 (4).

(3) La locale convessità segue dalla Proposizione 3.7.6. Vediamo la completezza. Una successione di Cauchy in X_∞, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, vi è limitata (Proposizione 3.4.14), dunque è contenuta in un X_n per il punto (2) e vi è ancora di Cauchy, infatti se $U \in \mathscr{B}_n$, allora per il punto (1) esiste un $S \in \mathscr{B}_\infty$ t.c. $S \cap X_n \subset U$, ma esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall p, q \geq n$ vale $x_p - x_q \in S$ e contemporaneamente $x_p - x_q \in X_n$ (perché $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X_n$ che è sottospazio lineare), dunque $\forall p, q \geq n$ vale $x_p - x_q \in U$. Quindi essendo X_n di Frechét si ha $x_n \to x \in X_n$. Ma preso $V \in \mathscr{B}_\infty$ si ha che $V \cap X_n$ è intorno di 0 in X_n e quindi $x + (V \cap X_n)$ è intorno di x in X_n (per il punto (1)), allora $x_n \in x + (V \cap X_n)$ definitivamente, da cui segue che $x_n \in x + V$ definitivamente. Quindi $x_n \to x$ anche in X_∞.

(4) Segue dal Corollario 3.1.9 che ogni X_n ha parte interna vuota in X_∞, ma allora X_∞ è di I-categoria e quindi essendo completo (punto (3)), per il Corollario 6.1.4 del Teorema di Baire, segue che non è metrizzabile.

(5) Segue dal Teorema 3.7.4.

□

Definizione 9.1.3: Sia X uno SVTLC, un insieme $B \subset X$ assorbente, bilanciato, convesso e chiuso è detto *barile*. Diremo che X è uno *spazio barilato* se ogni barile di X è un intorno (convesso) di $0 \in X$.

Proposizione 9.1.4: *Sia X uno spazio di Frechét, allora X è uno spazio barilato.*

Dimostrazione. Sia $B \subset X$ un barile, allora $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} nB$, ma X è di Frechèt, dunque è di II-categoria per il Corollario 6.1.4 del Teorema di Baire, ma allora necessariamente $\overset{\circ}{\overline{B}} = \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ ed essendo B bilanciato e convesso si ha di conseguenza $B \supset \frac{1}{2}(\overset{\circ}{B} - \overset{\circ}{B}) \ni 0 \in X$. □

Teorema 9.1.5: *Ogni limite induttivo di spazi barilati è spazio barilato.*

Dimostrazione. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spazi barilati e prendiamo $X_\infty = \varinjlim X_n$. Sia $B \subset X_\infty$ un suo barile, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $B \cap X_n$ è un barile di X_n (dalla continuità dell'inclusione $X_n \hookrightarrow X_\infty$ si ha la chiusura, il resto sono semplici verifiche). Ma allora $B \cap X_n$ è un intorno convesso di 0 in X_n e quindi B è un intorno di 0 in X_∞ (in particolare $B \in \mathscr{B}_\infty^{lc}$ della Proposizione 3.7.6). □

Corollario 9.1.6: *Ogni limite induttivo di spazi di Frechét è uno spazio barilato. In particolare ogni LF-spazio è uno spazio barilato.*

Definizione 9.1.7: Sia X uno SVTLC, un insieme $B \subset X$ è detto *bornofago* se assorbe ogni limitato di X. Diremo che X è uno *spazio bornologico* se ogni insieme convesso e bornofago di X è un intorno di 0 in X.

Proposizione 9.1.8: *Sia X SVTLC N1, allora X è uno spazio bornologico.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se $C \subset X$ è convesso ma non è intorno di 0 in X allora non è bornofago, da cui segue quanto voluto. Sia quindi $C \subset X$ convesso non intorno di 0 in X, allora esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus C$ t.c. $x_n \to 0$ in X. Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base locale di intorni di X t.c.

$$nU_{n+1} \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(possiamo prenderla così per continuità del prodotto per scalari) ed a meno di prendere una sottosuccessione possiamo supporre che $x_n \in U_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi si ha

$$nx_n \subset nU_{n+1} \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi $nx_n \to 0$ in X, in particolare $(nx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X e quindi è limitata per la Proposizione 3.4.14. Ma $nx_n \notin nC$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (perché $x_n \notin C$), quindi C non assorbe il limitato $\{nx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dunque C non è bornofago. □

Teorema 9.1.9: *Ogni limite induttivo di spazi bornologici è spazio bornologico.*

Dimostrazione. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spazi bornologici e prendiamo $X_\infty = \varinjlim X_n$. Sia $C \subset X_\infty$ convesso e bornofago in X_∞, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $C \cap X_n$ è convesso e bornofago in X_n (in quanto ogni limitato S di X_n è limitato anche in X_∞, infatti per ogni $U \in \mathscr{B}_\infty$ vale che $U \cap X_n$ è intorno di 0 in X_n, quindi assorbe S, in particolare U assorbe S, quindi S è limitato anche in X_∞). Dunque $C \cap X_n$ è intorno convesso di 0 in X_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi C è un intorno di 0 in X_∞ (in particolare $C \in \mathscr{B}^{lc}_\infty$ della Proposizione 3.7.6). □

Corollario 9.1.10: *Ogni limite induttivo di SVTLC N1 è uno spazio bornologico. In particolare ogni LF-spazio è uno spazio bornologico.*

9.2 Spazi di Funzioni Regolari

In tutto il resto della sezione sarà $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $\mathscr{K}(\Omega) = \{K \subset \mathbb{R}^d \mid K \text{ compatto}, K \subset \Omega\}$. Per $\alpha \in \mathbb{N}^d$ useremo le notazioni $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ e $\partial^\alpha f = \partial^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_d} f$ con f funzione per cui questo abbia senso. Inoltre considereremo i seguenti spazi d'ora in avanti (i dettagli di quanto affermeremo sono lasciati al lettore):

- $C^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ continua}\}$ con la topologia da SVTLC T0 indotta dalla famiglia separante di seminorme $\{\|.\|_{\infty,K}\}_{K \in \mathscr{K}(\Omega)}$;
- $C^0_K = \{f \in C^0(\Omega) \mid \mathrm{supp}(f) \subset K\}$, in cui $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ e $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$, munito della topologia da sottospazio topologico da SVTLC T0 indotta da quella di $C^0(\Omega)$ su $C^0_{K|\Omega}$ (che è in corrispondenza con C^0_K);
- $C^0_c(\Omega) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^d) \mid \mathrm{supp}(f) \in \mathscr{K}(\Omega)\}$, con la topologia da limite induttivo di SVTLC T0 data da $C^0_c(\Omega) = \varinjlim C^0_{K_j}$ con $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ compatti t.c. $K_j \subset K_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$;
- $C^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \exists \partial^\alpha f \text{ continua } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ con } |\alpha| \leq m\}$ con la topologia da SVTLC T0 data dalla famiglia separante di seminorme $\{p_{m,K}\}_{K \in \mathscr{K}(\Omega)}$, in cui
$$p_{m,K}(f) = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq m}} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,K} \quad \forall f \in C^m(\Omega);$$
- $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \exists \partial^\alpha f \text{ continua } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d\}$ con la topologia da SVTLC T0 data dalla famiglia separante di seminorme $\{p_{m,K}\}_{\substack{K \in \mathscr{K}(\Omega) \\ m \in \mathbb{N}}}$;
- $C^\infty_K = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \mathrm{supp}(f) \subset K\}$, in cui $K \in \mathscr{K}(\Omega)$, munito della topologia da sottospazio topologico da SVTLC indotta da quella di $C^\infty(\Omega)$ su $C^\infty_{K|\Omega}$ (che è in corrispondenza con C^∞_K), in particolare è indotta dalle seminorme $\{p_{m,K|C^\infty_K}\}_{m \in \mathbb{N}^d}$;
- $\mathscr{D}(\Omega) = C^\infty_c(\Omega) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \mathrm{supp}(f) \in \mathscr{K}(\Omega)\}$, con la topologia da limite induttivo di SVTLC T0 data da $C^\infty_c(\Omega) = \varinjlim C^\infty_{K_j}$ con $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ compatti t.c. $K_j \subset K_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$;

Lemma 9.2.1: *$C^0(\Omega)$ è uno spazio di Frechét.*

Dimostrazione. Se $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{K}(\Omega)$ sono t.c. $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ e $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ la topologia di $C^0(\Omega)$ è anche quella indotta dalla famiglia numerabile di seminorme $\{\|.\|_{\infty,K_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, dunque, essendo la topologia T0, si ha la metrizzabilità grazie al Teorema 3.6.1.

Vediamo la completezza. Se $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C^0(\Omega)$, allora per qualsiasi $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ si ha che $(f_{j|K})_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C^0(K)$ topologizzato dalla norma uniforme $\|.\|_{\infty,K}$, il quale è completo (Proposizione 1.3.2, ricordando che K è compatto), dunque

f_j converge uniformemente su ogni compatto di $\mathscr{K}(\Omega)$ ed in particolare su K_j per ogni $j \in \mathbb{N}$, quindi converge anche in $C^0(\Omega)$. □

Proposizione 9.2.2: *$C^0_c(\Omega)$ è un LF-spazio.*

Dimostrazione. Per ogni $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ lo spazio C^0_K è uno spazio di Frechét ($C^0_{K|\Omega}$ è sottospazio lineare chiuso di $C^0(\Omega)$ che è di Frechét per i Lemma 9.2.1), inoltre il limite induttivo è ovviamente stretto, quindi si ha quanto voluto. □

Corollario 9.2.3: *$C^m(\Omega)$ è uno spazio di Frechét.*

Dimostrazione. Se $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{K}(\Omega)$ sono t.c. $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ la topologia di $C^m(\Omega)$ è anche quella indotta dalla famiglia numerabile di seminorme $\{p_{m,K_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, dunque, come prima, la metrizzabilità segue dal Teorema 3.6.1.

La completezza segue da quella di $C^0(\Omega)$ (Lemma 9.2.1) e dal Teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C^m(\Omega)$ allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ la successione $(\partial^\alpha f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C^0(\Omega)$ (per la fattezza delle seminorme dei due spazi), dunque per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ la successione $(\partial^\alpha f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sui compatti di $\mathscr{K}(\Omega)$ (dalla fattezza della topologia di $C^0(\Omega)$) ad una $g_\alpha \in C^0(\Omega)$ e per il Teorema di limite sotto il segno di derivata segue che anche il limite $f = g_0 \in C^0(\Omega)$ è in realtà in $C^m(\Omega)$ con $\partial^\alpha f = g_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$. □

Teorema 9.2.4: *$C^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Frechét. Inoltre i limitati di $C^\infty(\Omega)$ sono relativamente compatti in $C^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Se $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{K}(\Omega)$ sono t.c. $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è anche quella indotta dalla famiglia numerabile di seminorme $\{p_{m,K_j}\}_{\substack{m\in\mathbb{N},\\ j\in\mathbb{N}}}$, dunque, come prima, la metrizzabilità segue dal Teorema 3.6.1.

Vediamo la completezza. Essendo le seminorme che topologizzano $C^m(\Omega)$ contenute in quelle che topologizzano $C^\infty(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ segue che se $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C^\infty(\Omega)$ allora lo è anche in $C^m(\Omega)$, dunque per il Corollario 9.2.3 la successione converge in $C^m(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e da questo segue che $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge in $C^\infty(\Omega)$ (in quanto ogni seminorma che topologizza $C^\infty(\Omega)$ topologizza anche $C^m(\Omega)$ per un qualche $m \in \mathbb{N}$).

Dimostriamo adesso l'ultima affermazione. Se $A \subset C^\infty(\Omega)$ è limitato allora dalla Proposizione 3.4.10 segue che

$$\sup_{f\in A} p_{m+1,K}(f) = C(m,K) < +\infty \ \ \forall K \in \mathscr{K}(\Omega) \ \ \forall m \in \mathbb{N}$$

e ciò implica che le $\{\partial^\alpha f \mid f \in A,\ \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ con } |\alpha| \leq m+1\}$ sono limitate sul compatto K, dunque prendendo K convesso, segue dal Teorema del valor medio, che le funzioni $\{\partial^\alpha f \mid f \in A,\ \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ con } |\alpha| \leq m\}$ sono equilipschitziane (e quindi equicontinue), quindi, presa una qualsiasi successione di funzioni in A, per il Teorema di Ascoli-Arzelà si trova una sottosuccessione convergente in $C^m(\Omega)$. Potendo fare questo per ogni $m \in \mathbb{N}$ troviamo una successione di sottosuccessioni t.c. l'm-esima sottosuccessione converge in $C^n(\Omega)$ per ogni $n \leq m$, dunque usando un argomento diagonale possiamo costruire attraverso esse un'ulteriore sottosuccessione che converge stavolta in ogni $C^m(\Omega)$ e quindi in $C^\infty(\Omega)$. Quindi A è relativamente sequenzialmente compatto. □

Teorema 9.2.5: *$\mathscr{D}(\Omega)$ è un LF-spazio.*

Dimostrazione. Per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ lo spazio C^∞_K è di Frechét ($C^\infty_{K\,|\Omega}$ sottospazio lineare chiuso di $C^\infty(\Omega)$ che è di Frechét per il Teorema 9.2.4), inoltre il limite induttivo è ovviamente stretto, quindi si ha quanto voluto. □

Nel seguito, dato $m \in \mathbb{N}$, denoteremo

$$p_m(f) = \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le m}} \|\partial^\alpha f\|_\infty \quad \forall f \in C^m(\Omega).$$

Osserviamo che se $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ allora per $f \in C^m(\Omega)$ con $\mathrm{supp}(f) \subset K$ vale

$$p_m(f) = p_{m,K}(f).$$

Inoltre utilizzeremo lo spazio

$$C^0(\Omega)_+ = \{f \in C^0(\Omega) \mid f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in \Omega\}.$$

Teorema 9.2.6 (Seminorme per $C^0_c(\Omega)$): *La famiglia di seminorme (norme) $\{\|.\|_\sigma\}_{\sigma\in C^0(\Omega)_+}$ in cui per ogni $\sigma \in C^0(\Omega)_+$ è*

$$\|u\|_\sigma = \|\sigma u\|_\infty \ \ \forall u \in C^0_c(\Omega)$$

induce la topologia di LF-spazio di $C^0_c(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mathrm{dist}(x, \Omega^c)} + \|x\| \ \ \forall x \in \Omega$$

allora $\varphi \in C^0(\Omega)_+$, $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$ ed un suo qualsiasi sottolivello $S_c = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \le c\}$, con $c \in \mathbb{R}$, è chiuso (per continuità) e limitato (perché se $x \in S_c$ allora necessariamente $\|x\| \le c$) in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ossia $S_c \in \mathcal{K}(\Omega)$. Consideriamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$K_i = \{x \in \Omega \mid |\varphi(x) - i| \le 1\}$$

che è chiuso e contenuto in S_{i+1}, dunque $K_i \in \mathcal{K}(\Omega)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Inoltre $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ e $K_i \cap K_j = \emptyset$ per $i, j \in \mathbb{N}$ con $|i - j| > 2$, infatti presi $i, j \in \mathbb{N}$ con $|i - j| > 2$ e $x \in K_j$ si ha

$$2 < |i - j| \le |i - \varphi(x)| + |\varphi(x) - j| \le |i - \varphi(x)| + 1$$

e quindi $|\varphi(x) - i| > 1$, ossia $x \notin K_i$.

Definiamo per $j \in \mathbb{N}$

$$\eta_j(x) = (1 - |\varphi(x) - j|)^+ \ \ \forall x \in \Omega$$

allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$, vale $\eta_j \in C^0(\Omega)_+$, $\mathrm{supp}(\eta_j) \subset K_j$ (se $x \in \Omega$ con $|\varphi(x) - j| > 1$ allora $\eta_j(x) = 0$) e $0 \le \eta_j \le 1$ su Ω, inoltre $\sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i = 1$ su Ω perché più in generale per ogni $t \in [0, +\infty)$ vale

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}}(1 - |t - i|)^+ &= [1 - (t - \lfloor t\rfloor)] + [1 - |t - (\lfloor t\rfloor + 1)|] \\ &= [1 - (t - \lfloor t\rfloor)] + [1 - ((\lfloor t\rfloor + 1) - t)] = 1.\end{aligned}$$

Sia U intorno convesso di 0 in $C^0_c(\Omega)$ e definiamo per ogni $j \in \mathbb{N}$ il numero

$$\delta_j = \inf\{\|u\|_\infty \mid u \in C^0_{K_j} \setminus U\}$$

ed osserviamo che $\delta_j > 0$ in quanto $U \cap C^0_{K_j}$ è intorno di $0 \in C^0_{K_j}$ (e $(C^0_{K_j} \setminus U) \cap (U \cap C^0_{K_j}) = \emptyset$). Inoltre sempre per $j \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\varepsilon_j = 2^{-j-4} \min(\delta_{j-2}, \delta_{j-1}, \delta_j, \delta_{j+1}, \delta_{j+2})$$

e quindi sarà

$$\rho(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j \eta_j(x) \ \ \forall x \in \Omega$$

ed osserviamo che $\rho \in C^0(\Omega)_+$ e $\rho(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$ (in quanto $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ricopre Ω e preso $x \in \Omega$ almeno un η_j è non nullo ed i ε_j sono tutti non nulli). Quindi è ben definita la funzione $\sigma \in C^0(\Omega)_+$ t.c.

$$\sigma(x) = \frac{1}{\rho(x)} \ \ \forall x \in \Omega.$$

Dimostriamo che $B_\sigma = \{u \in C^0_c(\Omega) \mid \|\sigma u\|_\infty < 1\} \subset U$. Sia $u \in B_\sigma$, allora

$$|\sigma(x)u(x)| < 1 \ \ \forall x \in \Omega$$

cioè

$$|u(x)| < \rho(x) \ \ \forall x \in \Omega.$$

Fissiamo adesso $i \in \mathbb{N}$ e consideriamo $u\eta_i \in C^0_{K_i}$, allora per ogni $x \in \Omega$ (essendo $\operatorname{supp}(\eta_j) \subset K_j$ per ogni $\forall j \in \mathbb{N}$, $K_i \cap K_j = \emptyset$ per $j \in \mathbb{N}$ con $|i-j| > 2$ e $0 \le \eta_j \le 1$ su Ω per ogni $j \in \mathbb{N}$) si ha

$$\begin{aligned}
|u(x)\eta_i(x)| < \rho(x)\eta_i(x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j \eta_j(x)\eta_i(x) \\
&= \sum_{j=i-2}^{i+2} \varepsilon_j \eta_j(x)\eta_i(x) \le \varepsilon_{i-2} + \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} \\
&\le (2^{-i-6} + 2^{-i-5} + 2^{-i-4} + 2^{-i-3} + 2^{-i-2})\delta_i \\
&\le (2^{-i-5} + 2^{-i-5} + 2^{-i-4} + 2^{-i-3} + 2^{-i-2})\delta_i \\
&= 2^{-i-1}\delta_i
\end{aligned}$$

cioè $|2^{i+1}u\eta_i| < \delta_i$ su Ω, da cui segue $\|2^{i+1}i\eta_i\|_\infty \le \delta_i$ e quindi necessariamente $2^{i+1}u\eta_i \in U$ (dalla definizione di δ_i). Ma vale

$$u = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i\right) u = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i u = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i-1}(2^{i+1}\eta_i u)$$

e questa è una somma con finiti termini non nulli, infatti $\eta_i u \neq 0$ solo per quegli $i \in \mathbb{N}$ t.c. $\operatorname{supp}(\eta_i) \cap \operatorname{supp}(u) \neq \emptyset$ che sono finiti in quanto $\operatorname{supp}(u) \in \mathcal{K}(\Omega)$ ed è ricoperto dagli aperti $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, in cui

$$A_i = \{x \in \Omega \mid |\varphi(x) - i| < 1\} \subset K_i \ \ \forall i \in \mathbb{N}$$

(tali A_i ricoprono Ω in quanto φ è continua, ed in particolare finita, su Ω), dunque esiste un sottoricoprimento finito $\{A_{i_j}\}_{j=0}^s$, con $s \in \mathbb{N}$ e $j_0 < j_1 < \ldots < j_s$, da cui

$$\operatorname{supp}(u) \subset \bigcup_{j=0}^s A_{i_j} \subset \bigcup_{j=0}^s K_{i_j} \subset \bigcup_{i=0}^{j_s} K_i$$

in particolare $\operatorname{supp}(u) \cap K_i = \emptyset$ per $i > j_s + 2$. Allora

$$u = \sum_{i=0}^{j_s} 2^{-i-1}(2^{i+1}\eta_i u) + \left(1 - \sum_{i=0}^{j_s} 2^{-i-1}\right) 0$$

che è combinazione convessa di elementi di U, che è convesso, quindi $u \in U$. Quindi $B_\sigma \subset U$. Ma per l'arbitrarietà di U intorno convesso di 0 in $C^0_c(\Omega)$ (che è SVTLC, quindi ammette una base locale di intorni aperti convessi) segue che la topologia indotta dalle seminorme $\{\|.\|_\sigma\}_{\sigma \in C^0(\Omega)_+}$ è fine almeno quanto quella da LF-spazio (B_σ è intorno di 0 nella topologia delle seminorme in questione su $C^0_c(\Omega)$).

D'altra parte, fissata $\sigma \in C^0(\Omega)_+$ e preso B_σ come prima, vale che $B_\sigma \cap C^0_K$ è intorno convesso di 0 in C^0_K per ogni $K \in \mathscr{K}(\Omega)$, infatti preso $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ e $u \in C^0_K$ vale

$$\|\sigma u\|_\infty \leq \|\sigma\|_{\infty,K}\|u\|_\infty$$

quindi

$$\{u \in C^0_K \mid \|u\|_{\infty,K} < \|\sigma\|^{-1}_{\infty,K}\} \subset B_\sigma$$

e il LHS è intorno di 0 in C^0_K, quindi si ha quanto voluto. Ma allora per la Proposizione 3.7.6 si ha che B_σ è intorno di 0 anche nella topologia da LF-spazio di $C^0_c(\Omega)$ e quindi quest'ultima topologia è fine almeno quanto quella delle seminorme $\{\|.\|_\sigma\}_{\sigma \in C^0(\Omega)_+}$. Di conseguenza si ha l'uguaglianza tra le due topologie considerate. □

Definizione 9.2.7: Le *parentesi di Iverson* sono le $[.]$ t.c. se P è una proposizione vale

$$[P] = \begin{cases} 0 & \text{se } P \text{ è falsa} \\ 1 & \text{se } P \text{ è vera} \end{cases}.$$

Lemma 9.2.8: *Ogni funzione positiva localmente limitata su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto è dominata da una funzione positiva continua.*

Dimostrazione. Basta fare il caso uno dimensionale, in quanto poi per il caso $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ basta applicare il caso unidimensionale ad ogni componente. Possiamo considerare senza perdita di generalità Ω un intervallo aperto (a meno di restringerci alle componenti connesse). Sia quindi $\Omega \subset \mathbb{R}$ aperto e $f : \Omega \to [0, +\infty)$ localmente limitata, allora per locale limitatezza per ogni $n \in \mathbb{Z} \cap \Omega$ esiste $M_n \in [0, +\infty)$ t.c.

$$\sup_{x \in [-(|n|+1), |n|+1] \cap \Omega} f(x) \leq M_n.$$

Dunque prendiamo $h : \Omega \to [0, +\infty)$ l'interpolazione lineare dei punti $\{(n, M_n)\}_{n \in \mathbb{Z} \cap \Omega}$, allora h è continua e $h \geq f$ su Ω. □

Proposizione 9.2.9 (Formula di Leibniz): *Siano $f, g \in \mathscr{D}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathbb{N}^d$. Vale la formula*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g)$$

in cui se $\beta = (\beta_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathbb{N}^d$ è $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i \ \ \forall i \in \{1, \dots, d\}$ e

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Dimostrazione. Prese $u, v \in \mathscr{D}(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, d\}$ e $n \in \mathbb{N}$ si dimostra facilmente per induzione la formula

$$\partial^n_{x_j}(uv) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\partial^i_{x_j} u)(\partial^{n-i}_{x_j} v)$$

Applicando tale formula in modo quasi compulsivo per ogni variabile si arriva a

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{i_d=0}^{\alpha_d} \binom{\alpha_1}{i_1} \dots \binom{\alpha_d}{i_d} (\partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_d}^{i_d} f)(\partial_{x_1}^{\alpha_1-i_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d-i_d} g)$$

che è quanto voluto. □

Teorema 9.2.10 (Seminorme di Gårding-Lions per $\mathscr{D}(\Omega)$): *Consideriamo la famiglia*

$$\Theta = \{\theta = (\theta_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{K}^d} \subset C^0(\Omega)_+ \mid \{\mathrm{supp}(\theta_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \text{ è una famiglia localmente finita}\}.$$

La famiglia di seminorme $\{\|.\|_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, in cui per ogni $\theta \in \Theta$ è

$$\|f\|_\theta = \max_{(x,\alpha)\in\Omega\times\mathbb{N}^d} |\theta_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)| \;\; \forall f \in C_c^\infty(\Omega)$$

induce la topologia di LF-spazio di $C_c^\infty(\Omega)$. In particolare basta la sottofamiglia di seminorme $\mathcal{P}_q = \{q_{\sigma,\mu} = \|.\|_{\theta^{(\sigma,\mu)}} \mid \sigma, \mu \in C^0(\Omega)_+ \text{ con } \theta^{(\sigma,\mu)} \in \Theta\}$, in cui per ogni $\sigma, \mu \in C^0(\Omega)_+$ si è chiamato $\theta^{(\sigma,\mu)} = \{\theta_\alpha^{(\sigma,\mu)}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$ con

$$\theta_\alpha^{(\sigma,\mu)}(x) = \sigma(x)\big[|\alpha| \le \mu(x)\big] \;\; \forall x \in \Omega$$

in cui le parentesi quadre sono le parentesi di Iverson.

Dimostrazione. Passo 1: *Vediamo che le $\|.\|_\theta$ sono ben definite.*

Vale che $\theta = (\theta_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \in \Theta$ se e solo se

$$\forall x \in \Omega \;\; \exists U \text{ intorno di } x \text{ t.c. } \forall x' \in U \text{ vale } \theta_\alpha(x') \neq 0 \text{ solo per finiti } \alpha \in \mathbb{N}^d \tag{9.1}$$

che a sua volta equivale a dire

$$\forall x \in \Omega \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \exists U \text{ intorno di } x \text{ t.c. } \forall x' \in U \;\; \theta_\alpha(x') = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ con } |\alpha| > m. \tag{9.2}$$

Per l'eq. (9.2), per ogni $\theta \in \Theta$, è ben definita una funzione $\mu_\theta : \Omega \to [0, +\infty)$ localmente finita (ogni punto di Ω ammette un intorno su cui μ_θ è finita) t.c.

$$\theta_\alpha(x) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \;\; |\alpha| > \mu_\theta(x)$$

infatti possiamo prendere

$$\mu_\theta(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \theta_\alpha(x) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \;\; |\alpha| > m\}$$

e senza perdita di generalità, per il Lemma 9.2.8, possiamo supporre μ_θ continua. Per l'eq. (9.1), fissate $\theta \in \Theta$ e $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, vale che

$$\mathrm{supp}(\theta f) = \overline{\{(x,\alpha) \in \Omega \times \mathbb{N}^d \mid \theta_\alpha(x) f(x) \neq 0\}}$$

è compatto, infatti $\mathrm{supp}(f)$ è compatto ed è quindi ben definito $N = \max_{x\in\mathrm{supp}(f)} \mu(x)$ (per continuità), ma allora vale

$$\theta_\alpha(x) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \;\; |\alpha| > N \;\; \forall x \in \mathrm{supp}(f)$$

da cui segue $\mathrm{supp}(\theta f) \subset \mathrm{supp}(f) \times \{0, 1, ..., N\}^d$ e quest'ultimo insieme è compatto nella topologia prodotto di $\Omega \times \mathbb{N}^d$ (in cui su $\mathbb{N}^d$ c'è a topologia discreta), quindi $\mathrm{supp}(\theta f)$ è chiuso in un compatto e quindi compatto. Come conseguenza di quanto detto si ha che è ben definito il massimo

$$\max_{(x,\alpha)\in\Omega\times\mathbb{N}^d} |\theta_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)| = \|f\|_\theta.$$

Passo 2: *Vediamo che* $\{\|.\|_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ *e* $\mathcal{P}_q$ *inducono la stessa topologia su* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Un sottoinsieme cofinale di Θ (A insieme, $B \subset A$ è cofinale in A se $\forall a \in A\ \exists b \in B$ t.c. $a \le b$) è quello dato dalle $\theta^{(\sigma,\theta)} \in \Theta$, infatti dato $\theta \in \Theta$ si ha

$$\theta_\alpha(x) \le \max_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^d \\ |\beta|\le\mu_\theta(x)}} \theta_\beta(x)\big[|\alpha| \le \mu_\theta(x)\big] = \sigma_\theta(x)\big[|\alpha| \le \mu_\theta(x)\big] = \theta_\alpha^{(\sigma_\theta,\mu_\theta)}(x).$$

Di conseguenza le topologie indotte dalle due famiglie, $\{\|.\|_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ e $\mathcal{P}_q$, sono la stessa (quella indotta dalla famiglia cofinale è ovviamente meno fine rispetto a quella data da tutte le seminorme, viceversa il fatto che è cofinale ci dice che per ogni $\theta \in \Theta$ esiste una $\theta^{(\sigma,\mu)}$ t.c. $\|.\|_\theta \le \|.\|_{\theta^{(\sigma,\mu)}} = q_{\sigma,\mu}$ e quindi che

$$\{x \in \Omega \mid q_{\sigma,\mu}(x) < n^{-1}\} \subset \{x \in \Omega \mid \|x\|_\theta < n^{-1}\}$$

dunque la topologia data dalla famiglia cofinita è più fine dell'altra).

Passo 3: *Vediamo adesso che* $\mathcal{P}_q$ *induce la topologia da LF-spazio di* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Osserviamo preliminarmente che per ogni $q_{\sigma,\mu} \in \mathcal{P}_q$ vale

$$q_{\sigma,\mu}(f) \le \|\sigma\|_{\infty,K}\, p_{m,K}(f) \quad \forall f \in C_K^\infty \tag{9.3}$$

con $m = \|\mu\|_{\infty,K}$.

Passo 3.1: *Vediamo che la topologia indotta dalla famiglia* $\mathcal{P}_q$ *è meno fine di quella da LF-spazio.*

Per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ l'inclusione $C_K^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ è continua rispetto alla topologia indotta da $\mathcal{P}_q$ su $\mathcal{D}(\Omega)$ grazie alla disuguaglianza nell'eq. (9.3) (Teorema 3.3.4). Ma allora presa una base locale di intorni convessi di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{B}$ (esiste per il Lemma 3.1.11), fissato $A \in \mathcal{B}$, si ha $A \cap C_K^\infty$ intorno di 0 convesso in C_K^∞ per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, di conseguenza A è intorno convesso in $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topologia da LF-spazio (Proposizione 3.7.6). Quindi, su $\mathcal{D}(\Omega)$, la topologia indotta dalla famiglia $\mathcal{P}_q$ è effettivamente meno fine di quella da LF-spazio.

Passo 3.2: *Vediamo che la topologia indotta dalla famiglia* $\mathcal{P}_q$ *è più fine di quella da LF-spazio.*

Fissiamo $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ non negativa su Ω e t.c. $S_c = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \le c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$. Consideriamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$K_i = \{x \in \Omega \mid |\varphi(x) - i| \le 1\}$$

che è compatto in quanto è chiuso e contenuto in S_{i+1}), quindi $K_i \in \mathcal{K}(\Omega)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Inoltre $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ e $K_i \cap K_j = \emptyset$ per $|i - j| > 2$, infatti presi $i, j \in \mathbb{N}$ con $|i - j| > 2$ e $x \in K_j$ si ha

$$2 < |i - j| \le |i - \varphi(x)| + |\varphi(x) - j| \le |i - \varphi(x)| + 1$$

e quindi $|\varphi(x) - i| > 1$, ossia $x \notin K_i$.

Fissiamo poi $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \le g(x) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{supp}(g) = [-1, 1]$ e

- $g(t) = g(-t)$ per ogni $t \in [0, +\infty)$;
- $g(t) + g(1 - t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$;

da queste due condizioni segue che per $t \geq 0$ vale

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} g(t-j) = g(t-\lfloor t\rfloor) + g(t-(\lfloor t\rfloor+1))$$
$$= g(t-\lfloor t\rfloor) + g(1-(t-\lfloor t\rfloor)) = 1$$

Poniamo allora per $j \in \mathbb{N}$

$$\eta_j(x) = g(\varphi(x)-i)$$

ed osserviamo che $\eta_j \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \eta_j \leq 1$ su Ω, $\sum_{\eta_j} = 1$ su Ω e $\operatorname{supp}(\eta_j) \subset K_j$ (se $x \in \Omega$ con $|\varphi - j| > 1$ allora $\eta_j(x) = 0$).

Prendiamo U un intorno convesso (senza perdita di generalità) di 0 in $\mathscr{D}(\Omega)$ nella sua topologia da LF-spazio. Per ogni $i \in \mathbb{N}$, poiché $U \cap C^\infty_{K_i}$ è intorno (convesso) di 0 in $C^\infty_{K_i}$ ne segue che esistono $\delta_i > 0$ ed $m_i > 0$ t.c.

$$\{f \in C^\infty_{K_i} \mid p_{m_i}(f) = p_{m_i,K}(f) \leq \delta_i\} \subset U.$$

Definiamo poi

$$l_j = \max_{\substack{i\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} m_i$$

e

$$\mu(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} l_j \eta_j(x) \ \ \forall x \in \Omega$$

osserviamo che $\mu \in C^0(\Omega)_+$. Inoltre per $i \in \mathbb{N}$ vale

$$m_i \leq \min_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} l_j$$

e se $x \in K_i$ allora

$$\mu(x) \geq \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} l_j\eta_j(x) \geq \min_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} l_j \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} \eta_j(x) = \min_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} l_j \sum_{k\in\mathbb{N}} \eta_k(x) = \min_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|i-j|\leq 2}} l_j \geq m_i$$

ossia

$$\mu(x) \geq m_i \ \ \forall x \in K_i. \tag{9.4}$$

A questo punto per ogni $i \in \mathbb{N}$ definiamo i numeri

$$\tilde{\delta}_i = 2^{-i-1}2^{-m_i} p_{m_i}(\eta_i)^{-1}\delta_i$$

e con questi per $j \in \mathbb{N}$ sarà

$$\varepsilon_j = \min_{\substack{i\in\mathbb{N}\\|j-i|\leq 2}} \tilde{\delta}_i,$$

ed infine

$$\sigma(x) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j\eta_j(x)\right)^{-1} \quad \forall x \in \Omega.$$

(osserviamo che $\sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j\eta_j$ è non nulla su tutto Ω in quanto $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ricopre Ω e preso $x \in \Omega$ almeno un η_j è non nullo ed i ε_j sono tutti non nulli). Allora per ogni $i \in \mathbb{N}$ vale

$$\tilde{\delta}_i \geq \max_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|j-i|\leq 2}} \varepsilon_j$$

e quindi per ogni $x \in K_i$ si ha

$$\begin{aligned}\sigma(x)^{-1} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j \eta_j(x) = \sum_{j=i-2}^{i+2} \varepsilon_j \eta_j(x) \\ &\leq \max_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\|j-i|\leq 2}} \varepsilon_j \sum_{j=i-2}^{i+2} \eta_j(x) \leq \max_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\|j-i|\leq 2}} \varepsilon_j \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j(x) = \max_{\substack{j\in\mathbb{N}\\|j-i|\leq 2}} \varepsilon_j \leq \tilde{\delta}_i\end{aligned}$$

ossia

$$\sigma(x)^{-1} \leq \tilde{\delta}_i \quad \forall x \in K_i \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{9.5}$$

Abbiamo quindi costruito entrambe le funzioni continue e positive σ e μ; adesso verifichiamo che effettivamente con queste si ha

$$\{f \in \mathscr{D}(\Omega) \mid q_{\sigma,\mu}(f) < 1\} \subset U.$$

Dico che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la funzione $2^{i+1}\eta_i f \in C^\infty_{K_i}$ e ha seminorma $p_{m_i}(2^{i+1}\eta_i f) < \delta_i$. Infatti fissato $i \in \mathbb{N}$ e presi $x \in K_i$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m_i$, usando Formula di Leibniz (Proposizione 9.2.9), si ottiene

$$\partial^\alpha(2^{i+1}\eta_i f)(x) = 2^{i+1}\partial^\alpha(\eta_i f)(x) = 2^{i+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta}\eta_i(x))(\partial^\beta f(x))$$

e prendendo il modulo abbiamo

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha(2^{i+1}\eta_i f)(x)| &\leq 2^{i+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta}\eta_i(x)||\partial^\beta f(x)| \\ &\leq 2^{i+1} \left[\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\right] p_{m_i}(\eta_i) \max_{\beta\leq\mu(x)} |\partial^\beta f(x)| \\ &= 2^{i+1} 2^{|\alpha|} p_{m_i}(\eta_i)\sigma(x) \max_{\beta\leq\mu(x)} |\partial^\beta f(x)|\sigma(x)^{-1} \\ &\leq 2^{i+1}2^{m_i} p_{m_i}(\eta_i) q_{\sigma,\mu}(f)\tilde{\delta}_i = q_{\sigma,\mu}(f)\delta_i\end{aligned}$$

in cui si sono usate le equazioni (9.4), (9.5) e la definizione di $\tilde{\delta}_i$. Di conseguenza se $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ con $q_{\sigma,\mu}(f) < 1$ allora

$$p_{m_i}(2^{i+1}\eta_i f) \leq \delta_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e quindi $2^{i+1}\eta_i f \in U$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Ma

$$f = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i\right) f = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i-1}(2^{i+1}\eta_i f)$$

e questa è una somma con finiti termini non nulli, infatti $\eta_i f \neq 0$ solo per quegli $i \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathrm{supp}(\eta_i) \cap \mathrm{supp}(f) \neq \emptyset$ che sono finiti in quanto $\mathrm{supp}(f) \in \mathscr{K}(\Omega)$ ed è ricoperto dagli aperti $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, in cui

$$A_i = \{x \in \Omega \mid |\varphi(x) - i| < 1\} \subset K_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(tali A_i ricoprono Ω in quanto φ è continua, ed in particolare finita, su Ω), dunque esiste un sottoricoprimento finito $\{A_{i_j}\}_{j=0}^s$, con $s \in \mathbb{N}$ e $j_0 < j_1 < \ldots < j_s$, da cui

$$\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{j=0}^{s} A_{i_j} \subset \bigcup_{j=0}^{s} K_{i_j} \subset \bigcup_{i=0}^{j_s} K_i$$

in particolare $\mathrm{supp}(f) \cap K_i = \emptyset$ per $i > j_s + 2$. Allora

$$f = \sum_{i=0}^{j_s} 2^{-i-1}(2^{i+1}\eta_i f) + \left(1 - \sum_{i=0}^{j_s} 2^{-i-1}\right) 0$$

che è combinazione convessa di elementi di U, che è convesso, quindi $f \in U$. Dunque effettivamente la topologia indotta dalla famiglia $\mathcal{P}_q$ è fine almeno quanto quella da LF-spazio su $\mathcal{D}(\Omega)$. Si ha quindi la tesi. □

9.3 Distribuzioni

Ancora sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $\mathcal{K}(\Omega) = \{K \subset \mathbb{R}^d \mid K \text{ compatto}, K \subset \Omega\}$.

Definizione 9.3.1: Un elemento di $\mathcal{D}^*(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$, cioè una forma lineare continua su $\mathcal{D}(\Omega)$, è detta *distribuzione*.

Teorema 9.3.2: *Sia $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

(1) u è una distribuzione;

(2) $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega)$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\exists C > 0$ t.c. $|\langle u, f\rangle| \le C p_m(f)$ per ogni $f \in C_K^\infty$;

(3) $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega)$ $\forall (f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_K^\infty$ t.c. $f_j \to 0$ in C_K^∞ si ha $\langle u, f_j\rangle \to 0$;

(4) $\exists q_{\sigma,\mu} \in \mathcal{P}_q$ t.c. $|\langle u, f\rangle| \le q_{\sigma,\mu}(f)$ per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(5) $\exists \theta \in \Theta$ t.c. $|\langle u, f\rangle| \le \|f\|_\theta$ per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1),(4) e (5) segue dal Teorema 9.2.10 e dalla Proposizione 3.3.5. Le equivalenze tra (1) e (3) e tra (1) e (2) seguono invece dalla Proposizione 9.1.2 (5) (C_K^∞ è spazio di Frechét, in particolare è metrizzabile e quindi N1, dunque un funzionale su C_K^∞ è continuo se e solo se è sequenzialmente continuo). □

Esempio 9.3.3 (Valutazioni di derivate come distribuzioni): Per ogni $x_0 \in \Omega$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il funzionale $D_{\alpha,x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\langle D_{\alpha,x_0}, f\rangle = \partial^\alpha f(x_0)$$

è una distribuzione.

Infatti fissati $\alpha \in \mathbb{N}^d$ e $x_0 \in \Omega$, presi comunque $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ e $f \in C_K^\infty$, si ha

$$|\langle D_{\alpha,x_0}, f\rangle| = |\partial^\alpha f(x_0)| \le \|\partial^\alpha f\|_{\infty,K} \le p_{|\alpha|}(f)$$

da cui quanto voluto per il Teorema 9.3.2.

Un caso famoso è quello in cui $\alpha = 0$, ossia D_{0,x_0}, la valutazione in x_0. Questa distribuzione è comunemente chiamata *distribuzione di Dirac* ed è spesso indicata con la notazione δ_{x_0}.

Definizione 9.3.4: Definiamo lo spazio di funzioni

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ misurabile e con } \int_K \|f\|\, dx < +\infty \ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \right\} /\!\sim$$

con $f \sim g$ se e solo se $f = g$ $\mathcal{L}^d$-q.o. su Ω.

Osservazione 9.3.5: Per ogni $p \in [1, +\infty]$ si ha il contenimento $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Proposizione 9.3.6 (Funzioni come distribuzioni): *È ben definita l'immersione*

$$T : L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^*(\Omega)$$

t.c. $\langle T_u, f\rangle = \int_\Omega f u \, dx$ *per ogni* $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione. Infatti fissati $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $f \in C^\infty_K$ vale

$$|\langle T_u, f\rangle| \leq \left[\int_K |u| \, dx\right] \|f\|_\infty = \left[\int_K |u| \, dx\right] p_0(f)$$

da cui segue la continuità di T_u grazie al Teorema 9.3.2. Vediamo ora che se se $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sono t.c. $T_u = T_v$, allora $u = v$. Per farlo, a meno di considerare separatamente parte reale e parte immaginaria possiamo supporre u, v funzioni reali. Presi $A_1 = \{x \in \Omega \mid u(x) < v(x)\}$ e $A_2 = \{x \in \Omega \mid u(x) > v(x)\}$, questi sono boreliani di Ω e per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ la funzioni indicatrici dei boreliani $A_1 \cap K$ e $A_2 \cap K$ sono approssimabili attraverso funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$, quindi per il Teorema di convergenza dominata (u, v sono integrabili su K) si ottiene

$$\int_{A_1 \cap K} (v - u) \, dx = \int_{A_2 \cap K} (u - v) \, dx = 0 \ \ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega)$$

da cui segue $\mathcal{L}^d(A_1 \cap K) = \mathcal{L}^d(A_2 \cap K) = 0$ per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ e quindi $\mathcal{L}^d(A_1) = \mathcal{L}^d(A_2) = 0$, ossia $u = v$ $\mathcal{L}^d$-q.o. su Ω. □

Definizione 9.3.7: Nel seguito, dato $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile, chiameremo

$$M^+(X) = \{\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty) \mid \mu \text{ misura}\}$$
$$M(X) = \{\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C} \mid \mu \text{ misura complessa}\}.$$

Proposizione 9.3.8 (Misure come distribuzioni): *È ben definita l'immersione*

$$I : M^+(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^*(\Omega)$$

t.c. $\langle I_\mu, f\rangle = \int_\Omega f \, d\mu$ *per ogni* $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e* $\mu \in M^+(\Omega)$.

Dimostrazione. Infatti fissati $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, $\mu \in M^+(\Omega)$ e $f \in C^\infty_K$ vale

$$|\langle I_\mu, f\rangle| \leq \mu(K)\|f\|_\infty = \mu(K) p_0(f)$$

da cui segue la continuità di I_μ grazie al Teorema 9.3.2. L'iniettività segue ancora per approssimazione (ogni funzione indicatrice di aperti può essere approssimata dal basso attraverso funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$), infatti, se $\mu, \nu \in M^+(\Omega)$ sono t.c. $I_\mu = I_\nu$, si ottiene

$$\mu(A) = \nu(A)$$

per ogni aperto $A \subset \Omega$. □

Corollario 9.3.9: *È ben definita l'immersione*

$$I : M(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^*(\Omega)$$

t.c. $\langle I_\mu, f\rangle = \int_\Omega f \, d\mu$ *per ogni* $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e* $\mu \in M(\Omega)$.

Dimostrazione. Segue dall'esistenza della decomposizione di Jordan di misure con segno (e dalla definizione di integrale rispetto ad una misura complessa). □

Definizione 9.3.10: Sia $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$. Se $m \in \mathbb{N}$ il più piccolo numero naturale per cui valga

$$\forall K \in \mathscr{K}(\Omega) \ \exists C > 0 \ \text{ t.c. } |\langle u, f\rangle| \le C p_m(f) \ \ \forall f \in C_K^\infty$$

allora u sarà detta *distribuzione di ordine* m. Se un tale $m \in \mathbb{N}$ non esiste allora u sarà detta distribuzione di ordine infinito.

Osservazione 9.3.11: Esistono ditribuzioni di ordine infinito.

Ad esempio fissata $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ t.c. $x_j \to x \in \partial\Omega$ vale necessariamente che $\forall K \in \mathscr{K}(\Omega)$ si ha $x_j \in \Omega \setminus K$ definitivamente. Quindi presa

$$u = \sum_{i\in\mathbb{N}} D_{\alpha_i, x_i}$$

con $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ successione t.c. $|\alpha_j| \to +\infty$ è una distribuzione di ordine infinito. Infatti preso un qualunque $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ vale

$$|\langle u, f\rangle| \le \sum_{i\in\mathbb{N}} |\partial^{\alpha_i} f(x_i)| = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ x_i\in K}} |\partial^{\alpha_i} f(x_i)| \le N_K p_{m_K}(f) \ \ \forall f \in C_K^\infty$$

con $N_k = |\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in K\}|$ ($N_K < +\infty$ perché $x_i \notin K$ definitivamente) ed $m_K = \max_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ x_i\in K}} |\alpha_i|$. Vediamo che m_K è il minor numero naturale per cui vale la maggiorazione voluta. Sia $m < m_K$ e chiamiamo i_K quell'indice t.c. $|\alpha_{i_K}| = m_K$. Fissiamo un funzione $\phi \in C_K^\infty$ t.c. $\partial^{\alpha_{i_K}} \phi(x_{i_k}) = 1$ e prendiamo $f_n(x) = \phi(nx - (n-1)x_{i_K}) \in C_K^\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ (in modo che $\partial^{\alpha_{i_K}} f_n(x_{i_K}) = n^{m_K} \partial^{\alpha_{i_K}} \phi(x_{i_k}) = n^{m_K}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$). Allora se esistesse $M_K > 0$ t.c.

$$|\langle u, f\rangle| \le M_K p_m(f) \ \ \forall f \in C_K^\infty$$

si avrebbe in particolare

$$\left| \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ x_i\in K}} \partial^{\alpha_i} f_n(x_i) \right| \le M_K p_m(f_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$$

ma il RHS è un $o(n^{m_K})$ mentre il LHS non lo è, da cui segue un assurdo.

Concludiamo che quindi u ha ordine infinito in quanto $|\alpha_i| \to +\infty$.

Definizione 9.3.12: Siano $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Definiamo la *derivata α-esima* della distribuzione u come quella distribuzione $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ t.c.

$$\langle \partial^\alpha u, f\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha f\rangle \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Osservazione 9.3.13: Quella appena data è una buona definizione, ossia $\partial^\alpha u$ è effettivamente una distribuzione. Infatti, per il Teorema 9.3.2, se $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ esistono $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle u, f\rangle| \le C p_m(f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

ed allora

$$|\langle \partial^\alpha u, f\rangle| = |\langle u, \partial^\alpha f\rangle| \le C p_m(\partial^\alpha f) \le C p_{m+|\alpha|}(f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

da cui quanto voluto grazie al Teorema 9.3.2.

Osservazione 9.3.14: È quindi ben definito l'*operatore di α-esima derivata distribuzionale*

$$\partial^\alpha : \mathscr{D}^*(\Omega) \to \mathscr{D}^*(\Omega)$$

che associa ad ogni distribuzione la sua derivata α-esima. Osserviamo che tale operatore non è altro che l'aggiunto dell'operatore

$$(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$$

che associa ad ogni funzione di $\mathscr{D}(\Omega)$ la sua derivata α-esima moltiplicata per $(-1)^{|\alpha|}$.

Osservazione 9.3.15: Osserviamo che presi $p \in \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vale

$$\langle \partial^\alpha \delta_p, f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \delta_p, \partial^\alpha f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle D_{\alpha,p}, f\rangle \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

ossia $\partial^\alpha \delta_p = \partial^\alpha D_{0,p} = (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha,p}$.

Osservazione 9.3.16 (Variazione totale di una misura complessa): Dato $(X, \mathscr{M})$ spazio misurabile e $\nu : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$ una misura complessa. Possiamo definire la variazione totale di ν come la funzione d'insieme

$$\|\nu\| : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$$

t.c.

$$\|\nu\|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{N} \|\nu(A_j)\| \mid \{A_1, ..., A_N\} \subset \mathscr{M} \text{ è una partizione di } A \text{ e } N \in \mathbb{N}_+\right\} \ \ \forall A \in \mathscr{M}.$$

Si dimostra che $\|\nu\|$ è effettivamente una misura (positiva) finita su $(X, \mathscr{M})$.

Attraverso la variazione totale è possibile definire una norma sullo spazio $M(X)$ data da

$$\|.\|_X : M(X) \to [0, +\infty)$$

t.c. $\|\nu\|_X = \|\nu\|(X)$ per ogni $\nu \in M(X)$.

Ricordiamo a questo punto il seguente teorema.

Teorema 9.3.17: *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff. Lo spazio duale $C_0^0(X)^*$ (in cui su $C_0^0(X)$ c'è la norma uniforme) è linearmente isometrico allo spazio $M(X)$. In particolare lo è tramite l'isometria $\mu : C_0^0(X)^* \to M(X)$ t.c.*

$$\langle \phi, f\rangle = \int_X f(x)\, d\mu_\phi(x)\ \forall f \in C_0^0(X) \ \ \forall \phi \in C_0^0(X)^*.$$

Proposizione 9.3.18: *Sia $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$, allora esiste una famiglia di misure con segno $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \subset M(\Omega)$ con $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \|m_\alpha\|_\Omega \le 1$ ed un $\theta \in \Theta$ t.c.*

$$\langle u, f\rangle = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \int_\Omega \theta_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)\, dm_\alpha(x) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Dimostrazione. Lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ è topologizzato dalle seminorme $\{\|.\|_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ (Teorema 9.2.10) e possiamo vedere in modo naturale $\Theta \subset C^0(\Omega\times\mathbb{N}^d, \mathbb{R})$ (un $\theta = (\theta_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \in \Theta$ è t.c. $\theta_\alpha \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ e possiamo vedere θ come una funzione $\Omega \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$, ma $\{\Omega \times \{\alpha\}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$ è un ricoprimento aperto di $\Omega \times \mathbb{N}^d$ ed in particolare è fondamentale, quindi $\theta \in C^0(\Omega \times \mathbb{N}^d, \mathbb{R})$). Essendo $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$, grazie al Teorema 9.3.2, è possibile trovare $\theta \in \Theta$ t.c..

$$|\langle u, f\rangle| \leq \|f\|_\theta = \sup_{(x,\alpha)\in\Omega\times\mathbb{N}^d} |\theta_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)| \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Consideriamo per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ il funzionale lineare continuo $\varphi_{\theta,f} : \Omega \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{C}$ t.c.

$$\langle \varphi_{\theta,f}, (x, \alpha)\rangle = \theta_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)$$

e notiamo che $\varphi_{\theta,f} \in C_0^0(\Omega \times \mathbb{N}^d)$ per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$. Quindi il funzionale lineare $l_\theta : \{\varphi_{\theta,f}\}_{f\in\mathscr{D}(\Omega)} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$l_\theta(\varphi_{\theta,f}) = \langle u, f\rangle$$

è definito su un sottospazio lineare di $C_0^0(\Omega \times \mathbb{N}^d)$ ed è continuo, infatti

$$|l_\theta(\varphi_f)| = |\langle u, f\rangle| \leq \sup_{(x,\alpha)\in\Omega\times\mathbb{N}^d} |\theta_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)| = \|\varphi_{\theta,f}\|_\infty \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

ed in particolare $\|l_\theta\|_{\text{op}} \leq 1$. Dunque, per il Corollario 4.1.2 del Teorema di Hahn-Banach, si può estendere l_θ ad un funzionale lineare continuo L_θ su tutto $C_0^0(\Omega \times N^d)$ di norma $\|L_\theta\|_* \leq 1$. Per Il Teorema 9.3.17 si ha l'esistenza di una misura $m \in M_(\Omega \times \mathbb{N}^d)$ t.c.

$$\langle L_\theta, \phi\rangle = \int_{\Omega\times\mathbb{N}^d} \phi(x, \alpha)\, dm(x, \alpha) \;\; \forall \phi \in C_0^0(\Omega \times \mathbb{N}^d, \mathbb{R}).$$

Ma non è difficile osservare che possiamo scrivere $m = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} m_\alpha$ ($\mathbb{N}^d$ è numerabile e m è σ-additiva) con

$$m_\alpha(A) = m(A \cap (\Omega \times \{\alpha\})) \;\; \forall A \in \mathscr{B}(\Omega \times \mathbb{N}^d) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$$

e inoltre $\|m\|_{\Omega\times\mathbb{N}^d} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \|m_\alpha\|_\Omega \leq 1$. □

Osservazione 9.3.19 (Moltiplicazione tra $f \in C^\infty(\Omega)$ e una distribuzione): Data $\phi \in C^\infty(\Omega)$ è ben definito l'operatore $\mathrm{M}_\phi : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ t.c.

$$\mathrm{M}_\phi f = f\phi \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

ed è continuo perché per ogni $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ lo è $\mathrm{M}_{\phi|C_K^\infty} : C_K^\infty \to C_K^\infty$ (Proposizione 9.1.2 (5)), infatti per la Formula di Leibniz (Proposizione 9.2.9), per ogni $m \in \mathbb{N}$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$, si ha

$$|\partial^\alpha(f\phi)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta}\phi||\partial^\beta f \leq [2^m p_{m,K}(\phi)]p_m(f) \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

e quindi si ha l'esistenza di una costante $C_K > 0$ t.c.

$$p_m(f\phi) \leq C_K p_m(f) \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Quindi è ben definito l'operatore aggiunto $\mathrm{M}_\phi^* : \mathscr{D}^*(\Omega) \to \mathscr{D}^*(\Omega)$ t.c.

$$\left\langle \mathrm{M}_\phi^* u, f\right\rangle = \langle u, f\phi\rangle \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega) \;\; \forall u \in \mathscr{D}^*(\Omega).$$

Teorema 9.3.20 (Rappresentazione di distribuzioni di ordine finito): *Una $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ di ordine $m \in \mathbb{N}$ è della forma*

$$\langle u, f\rangle = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le m}} \int_\Omega \partial^\alpha f(x)\, dm_\alpha(x)$$

in cui $\{m_\alpha\}_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le m}} \subset M(\Omega)$.

Dimostrazione. Una distribuzione di ordine m è t.c. per ogni $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ esiste un $C_K > 0$ t.c.

$$\langle u, f\rangle \le C_K p_{m_K}(f) \ \ \forall f \in C_K^\infty$$

ma allora è continua anche vista come funzionale definito in $C_c^\infty(\Omega) \subset C_0^m(\Omega) = \{f \in C^m(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in C_0^0(\Omega)\ \alpha \in \mathbb{N}^d\ |\alpha| \le m\} \subset C^m(\Omega)$, dunque per il Corollario 4.1.2 del Teorema di Hahn-Banach si può estendere ad un funzionale continuo F_u su $C_0^m(\Omega)$ che include come sottospazio topologico in $C_0^0(\Omega)^{N_m}$ con $N_m = |\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha| \le m\}|$ tramite

$$C_0^m(\Omega) \overset{J_m}{\hookrightarrow} C_0^0(\Omega)^{N_m}$$

t.c. $J_m(f) = (\partial^\alpha f)_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le m}}$ (su $C_0^0(\Omega)$ stiamo considerando la norma uniforme e su $C_0^0(\Omega)^{N_m}$ stiamo considerando la norma $\|(g_1, ..., g_{N_m})\|_{N^m} = \max(\|g_1\|_\infty, ..., \|g_{N_m}\|_\infty)$ per ogni $(g_1, ..., g_{N_m}) \in C_0^0(\Omega)^{N_m}$, infatti questa norma rende continua l'inclusione J_m: è una facile verifica usando la Proposizione 3.3.4). Allora, ricordando la Proposizione 1.1.11, per quanto detto F_u corrisponde ad un funzionale continuo $\tilde{F}_u \in [C_0^0(\Omega)^*]^{N_m}$ (ogni $C_0^0(\Omega)^*$ è il duale di $C_0^0(\Omega)$ rispetto alla norma uniforme) a cui però corrispondono N_m misure con segno di Radon $\{m_\alpha\}_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le m}} \subset M(\Omega)$ (Teorema 9.3.17), quindi vale la relazione

$$\langle F_u, f\rangle = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le m}} \int_\Omega \partial^\alpha f(x)\, dm_\alpha(x) \ \ \forall f \in C_0^m(\Omega)$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 9.3.21: *Una $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ ha ordine 0 se e solo se $\exists \nu \in M(\Omega)$ t.c.*

$$\langle u, f\rangle = \int_\Omega f(x)\, d\nu(x) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Dimostrazione. Come già dimostrato una $\nu \in M(\Omega)$ definisce una distribuzione di $\mathscr{D}^*(\Omega)$ (dal Corollario 9.3.9) della forma come nella tesi e viceversa per il Teorema 9.3.20 si ha che ogni $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ è della forma voluta. □

Proposizione 9.3.22: *Se $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ è positiva, cioè $\langle u, f\rangle \ge 0$ per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $f \ge 0$ su Ω, allora è di ordine 0 ed esiste μ misura (positiva) finita su Ω t.c.*

$$\langle u, f\rangle = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Dimostrazione. Fissiamo un qualsiasi $K \in \mathscr{K}(\Omega)$, esiste $\eta_K \in C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \le \eta_K \le 1$ t.c. $\eta_K = 1$ su K, allora per ogni $f \in C_K^\infty$ reale vale $\|f\|_\infty \eta_K \pm f \ge 0$ e quindi

$$\|f\|_\infty \langle u, \eta_K\rangle \pm \langle u, f\rangle \ge 0$$

da cui segue

$$|\langle u, f\rangle| \leq \|f\|_\infty \langle u, \eta_K\rangle$$

e tale disuguaglianza si estende facilmente ad f complessa dividendola in parte reale e immaginaria, quindi u ha ordine 0. In particolare, per il Corollario 9.3.21, esiste una $\mu \in M(\Omega)$ t.c. $\langle u, f\rangle = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$, ma deve essere

$$0 \leq \langle u, f\rangle = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$$

per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $f \geq 0$ su Ω, in particolare essendo ogni caratteristica di aperti approssimabile dal basso attraverso funzioni in $\mathscr{D}(\Omega)$ positive si ottiene quanto voluto. □

Teorema 9.3.23 (Successioni di distribuzioni): *Sia $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}^*(\Omega)$ una successione di distribuzioni convergente puntualmente ad una $u : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, cioè t.c.*

$$\langle u_j, f\rangle \longrightarrow \langle u, f\rangle\ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

allora u è una distribuzione, cioè $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$.

Dimostrazione. La linearità passa al limite puntuale. Vediamo la continuità. Fissiamo un qualsiasi $K \in \mathscr{K}(\Omega)$. Essendo $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ puntualmente convergente è puntualmente limitata, in particolare lo è la successione $(u_{j|C_K^\infty})_{j\in\mathbb{N}}$. Ma C_K^∞ è di Frechét, in particolare è di II-categoria per il Corollario 6.1.4 del Teorema di Baire, quindi possiamo applicare il Teorema 6.2.5 di Banach-Steinhaus per dire che le $(u_{j|C_K^\infty})_{j\in\mathbb{N}}$ sono equicontinue, ossia (per la Proposizione 6.2.3) esiste $C_K > 0$ ed $m_K \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle u_j, f\rangle| \leq C_K p_{m_K}(f)\ \ \forall f \in C_K^\infty\ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

e passando al limite si ottiene

$$|\langle u, f\rangle| \leq C_K p_{m_K}(f)\ \ \forall f \in C_K^\infty\ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

da cui la continuità voluta per il Teorema 9.3.2. □

Osservazione 9.3.24: Sia $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}^*(\Omega)$ t.c. $u_j \to u$ puntualmente e $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $f_j \to f$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. Allora per il Teorema 9.3.23 $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ ed essendo $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente è limitata in $\mathscr{D}(\Omega)$ e quindi (Proposizione 9.1.2 (2)) esiste $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ t.c. $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_K^\infty$. Ma esistono $C_K > 0$ e $m_K \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle u_j, f\rangle| \leq C_K p_{m_K}(f)\ \ \forall f \in C_K^\infty\ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

(dalla dimostrazione precedente) e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}|\langle u_j, f_j\rangle - \langle u, f\rangle| &\leq |\langle u_j, f_j\rangle - \langle u_j, f\rangle| + |\langle u_j, f\rangle - \langle u, f\rangle| \\ &\leq C_K p_{m_K}(f_j - f) + |\langle u_j, f\rangle - \langle u, f\rangle| = o(1)\end{aligned}$$

ossia

$$\langle u_j, f_j\rangle \longrightarrow \langle u, f\rangle.$$

Osservazione 9.3.25 (Restrizione di distribuzioni): Dati due aperti $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ con $\Omega_1 \subset \Omega_2$ vi è un ovvio contenimento $\mathscr{D}(\Omega_1) \subset \mathscr{D}(\Omega_2)$, dunque dualizzando l'inclusione $\mathscr{D}(\Omega_1) \hookrightarrow \mathscr{D}(\Omega_2)$ si ottiene l'*operatore di restrizione distribuzionale* da Ω_2 a Ω_1

$$\rho(\Omega_2; \Omega_1) : \mathscr{D}^*(\Omega_2) \longrightarrow \mathscr{D}^*(\Omega_1).$$

Nel seguito se $u \in \mathscr{D}^*(\Omega_2)$ scriveremo $u_{|\Omega_1} = \rho(\Omega_2; \Omega_1)u$.

Proposizione 9.3.26: *Supponiamo sia* $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ *con* Ω_j *aperto di* $\mathbb{R}^d$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$. *Se* $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ *è t.c.* $u_{|\Omega_j} = 0$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$ *allora* $u = 0 \in \mathscr{D}^*(\Omega)$.

Dimostrazione. Infatti presa $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ esiste $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ t.c. $f \in C^\infty_K$. Per compattezza K è ricoperto da un numero finito di aperti $\{\Omega_j\}_{j\in F_K}$ e presa $\{\eta_j\}_{j\in F_K}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{\Omega_j\}_{j\in F_K}$ si ha $f = \sum_{j\in F_K} f\eta_j$ e

$$\langle u, f\rangle = \sum_{j\in F_K} \langle u, f\eta_j\rangle = 0$$

in quanto $f\eta_j \in \mathscr{D}(\Omega_j)$. □

Corollario 9.3.27: *Supponiamo sia* $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ *con* Ω_j *aperto di* $\mathbb{R}^d$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$ *e supponiamo siano date* $u_j \in \mathscr{D}^*(\Omega_j)$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$ *t.c.* $u_{j\,|\Omega_i\cap\Omega_j} = u_{i\,|\Omega_i\cap\Omega_j}$ *per ogni* $i, j \in \mathbb{N}$. *Allora esiste un'unica* $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ *t.c.* $u_{|\Omega_j} = u_j$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$.

Definizione 9.3.28: Sia $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$, preso $S_u = \{\Omega' \subset \Omega \mid \Omega' \text{ aperto in } \Omega \text{ e } u_{|\Omega'} = 0\}$ consideriamo $\Omega_u = \bigcup_{\Omega'\in S_u} \Omega'$. Il *supporto* di u è definito come

$$\mathscr{S}_u = \Omega \setminus \Omega_u.$$

Osservazione 9.3.29: Il supporto di una distribuzione in $\mathscr{D}^*(\Omega)$ è sempre chiuso in Ω.

Teorema 9.3.30: *Sia* $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$.

(1) Se $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ *è t.c.* $\operatorname{supp}(f) \cap \mathscr{S}_u = \emptyset$ *allora* $\langle u, f\rangle = 0$.

(2) Se $\mathscr{S}_u = \emptyset$ *allora* $u = 0 \in \mathscr{D}^*(\Omega)$.

(3) Se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *è t.c.* $\phi = 1$ *su un aperto* V *t.c.* $\mathscr{S}_u \subset V$ *allora* $\mathrm{M}^*_\phi u = u$.

Dimostrazione. I punti (1) e (2) sono praticamente ovvi dalle definizioni. Vediamo (3). Sia $\phi \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $\phi = 1$ su un aperto V t.c. $\mathscr{S}_u \subset V$ allora per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ vale $f - \phi f = 0$ su $V \supsetneq \mathscr{S}_u$ e quindi

$$\operatorname{supp}(f - \phi f) \cap \mathscr{S}_u = \emptyset$$

e quindi per il punto (1) vale $\langle u, f - \phi f\rangle = 0$ ossia

$$\langle u, f\rangle = \langle u, \phi f\rangle \;\; \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

che è quanto voluto. □

Osservazione 9.3.31: Nel punto (1) del Teorema precedente abbiamo supposto f nulla su tutto un intorno aperto di $\mathscr{S}_u$ non solo che $f = 0$ su $\mathscr{S}_u$.

9.4 Distribuzioni a Supporto Compatto

Sarà ancora fissato Ω aperto di $\mathbb{R}^d$. Nel seguito denoteremo $\mathscr{E}(\Omega)$ lo spazio $C^\infty(\Omega)$ con la sua topologia da spazio di Frechét descritta nella Sezione 9.2. Inoltre sarà $\mathscr{E}^*(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)^*$.

Definizione 9.4.1: Una distribuzione $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ è detta *a supporto compatto* se $\mathscr{S}_u \in \mathscr{K}(\Omega)$. Inoltre denoteremo con

$$\mathscr{D}^*_c(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}^*(\Omega) \mid \mathscr{S}_u \in \mathscr{K}(\Omega)\}.$$

Proposizione 9.4.2: *Siano $u \in \mathscr{D}_c^*(\Omega)$ e $K \in \mathscr{K}(\Omega)$. Date le seguenti tre affermazioni:*

(1) $\mathscr{S}_u \subset \mathring{K}$;

(2) esistono $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle u, f\rangle| \leq C p_{m,K}(f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega);$$

(3) $\mathscr{S}_u \subset K$;

valgono le implicazioni (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Sia $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $\psi = 1$ su un intorno aperto di $\mathscr{S}_u$ contenuto in $\mathring{K}$ e $\psi = 0$ fuori da $\mathring{K}$. Allora per il Teorema 9.3.30 (3) si ha

$$\langle u, f\rangle = \langle u, f\psi\rangle \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ma $f\psi \in C_K^\infty \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$, quindi per continuità esistono $C' > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle u, f\psi\rangle| \leq C' p_{m,K}(f\psi) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

ed usando la Formula di Leibniz 9.2.9 si ottiene l'esistenza di una $C'' > 0$ t.c.

$$p_{m,K}(f\psi) \leq C'' p_{m,K}(f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

da cui segue quanto voluto.

(2) $\Rightarrow$ (3). Ovvio. □

Osservazione 9.4.3: In generale (3) $\not\Rightarrow$ (2), infatti se si prende $u : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} \frac{1}{k}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0)\right)$$

vale che $u \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R})$ dal Teorema di Lagrange e $\mathscr{S}_u = K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}_+}$. Inoltre se per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si considera $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a valori in $[0,1]$ t.c. $\varphi_n = 0$ su $\left(-\infty, \frac{1}{n+1}\right] \cup (1, +\infty)$ e $\varphi_n = 1$ su $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ vale che

$$p_{m,K}(\varphi_n) = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$$

mentre

$$\langle u, \varphi_n\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

da cui segue che una stima come quella nel punto (2) della Proposizione precedente non può essere realizzata.

Lemma 9.4.4: *L'insieme $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso nello spazio di Frechét $\mathscr{E}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathscr{E}(\Omega)$. Preso un qualsiasi $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ esiste una $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $\phi = f$ su K. Ne segue la tesi. Infatti ogni intorno U di f in $\mathscr{E}(\Omega)$ ne contiene uno della forma

$$V = \bigcap_{i=1}^n \{f + \eta \mid \eta \in \mathscr{E}(\Omega) \ \ p_{m_i,K_i}(\eta) \leq \varepsilon\}$$

per qualche $m_i \in \mathbb{N}$, $K_i \in \mathscr{K}(\Omega)$ con $i = 1, \ldots, n$ e $\varepsilon > 0$ (Teorema **??**). Quindi presa $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $\phi = f$ su $\bigcup_{i=1}^n K_i$ si ha che $\eta = \phi - f = 0$ su $\bigcup_{i=1}^n K_i$ ed in particolare $p_{m_i,K_i}(\eta) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, da cui segue che $\mathscr{D}(\Omega) \ni \phi = f + \eta \in V \subset U$. Si ha quindi la tesi. □

Teorema 9.4.5: *Una distribuzione $u \in \mathscr{D}_c^*(\Omega)$ si estende in modo unico ad un funzionale $\tilde{u} \in \mathscr{E}^*(\Omega)$ t.c. $\langle \tilde{u}, f \rangle = 0$ per ogni $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ con $f = 0$ su un intorno aperto di $\mathscr{S}_u$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $\psi = 1$ su V un intorno aperto di $\mathscr{S}_u$, allora per il Teorema 9.3.30 (3) si ha $\langle u, f \rangle = \langle u, \psi f \rangle$ per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$. Chiamiamo $K = \text{supp}(\psi) \in \mathscr{K}(\Omega)$. Per il Teorema 9.3.2 esistono $C_K > 0$ e $m_K \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\langle u, f \rangle| \leq C_K p_{m_K}(f) \ \ \forall f \in C_K^\infty$$

in particolare essendo $\psi f \in C_K^\infty$ per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$|\langle u, f \rangle| \leq C_K p_{m_K}(\psi f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Grazie alla Formula di Leibniz (Proposizione 9.2.9), per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m_K$, si ottiene

$$|\partial^\alpha(\psi f)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \psi)(\partial^{\alpha-\beta} f) \leq (2^{m_K} p_{m_k}(\psi)) p_{m_K,K}(f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$$

dunque $\exists \tilde{C}_K > 0$ t.c.

$$|\langle u, f \rangle| \leq \tilde{C}_K p_{m_K,K}(f) \ \ \forall f \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{9.6}$$

Essendo $\langle u, f \rangle = \langle u, \psi f \rangle$ per ogni $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ il funzionale lineare $\tilde{u} : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\langle \tilde{u}, f \rangle = \langle u, \psi f \rangle \ \ \forall f \in \mathscr{E}(\Omega)$$

definisce un'estensione di u che è continua, infatti se $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{E}(\Omega)$ e $f_i \to f \in \mathscr{E}(\Omega)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vale $\partial^\alpha f_i \to \partial^\alpha f$ uniformemente sui compatti di Ω e sempre la Formula di Leibniz ci permette di scrivere

$$p_m(\psi(f_i - f)) \leq (2^m p_m(\psi)) p_{m,K}(f_i - f) \ \ \forall m \in \mathbb{N}$$

ma per quanto appena detto $p_{m,K}(f_i - f) \to 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, di conseguenza $\psi(f_i - f) \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ (con la topologia da LF-spazio, infatti $(\psi(f_i - f))_{i \in \mathbb{N}} \subset C_K^\infty$ e $\psi(f_i - f) \to 0$ in C_K^∞), ossia $\psi f_i \to \psi f$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. Ma $u \in \mathscr{D}^*(\Omega)$, quindi

$$\langle \tilde{u}, f_i \rangle = \langle u, \psi f_i \rangle \longrightarrow \langle u, \psi f \rangle = \langle \tilde{u}, f \rangle$$

che è la continuità voluta.

Inoltre se $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ è t.c. $f = 0$ su V intorno aperto di $\mathscr{S}_u$ in Ω, allora $\text{supp}(\psi f) \cap \mathscr{S}_u = \emptyset$ e si ottiene $\langle \tilde{u}, f \rangle = \langle u, \psi f \rangle = 0$ dal Teorema 9.3.30 (1).

Infine dall'eq. (9.6) segue che u è continua anche rispetto alla topologia da sottospazio di indotta da $\mathscr{E}(\Omega)$ su $\mathscr{D}(\Omega)$ ed anzi è uniformemente continua, di conseguenza l'estensione è unica (dal Teorema di estensione per uniforme continuità, ricordare che $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso in $\mathscr{E}(\Omega)$ per il Lemma precedente), in particolare non dipende da ψ. □

Osservazione 9.4.6: La topologia da sottospazio di indotta da $\mathscr{E}(\Omega)$ su $\mathscr{D}(\Omega)$ non è mai uguale a quella da LF-spazio di $\mathscr{D}(\Omega)$. Infatti la prima è metrizzabile (dal Teorema 9.2.4 sappiamo che $\mathscr{E}(\Omega)$ è di Frechét) mentre la seconda non lo è (Teorema 9.1.2).

Corollario 9.4.7: *C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathscr{D}_c^*(\Omega)$ e $\mathscr{E}^*(\Omega)$.*

Dimostrazione. Infatti consideriamo la funzione

$$j : \mathscr{D}_c^*(\Omega) \to \mathscr{E}^*(\Omega)$$

data da $j(u) = \tilde{u}$ con $\tilde{u}$ l'estensione di u definita nella dimostrazione del Teorema 9.4.5. Ovviamente j è iniettiva. Vediamo la surgettività. Sia $v \in \mathscr{E}^*(\Omega)$, consideriamo $u = v_{|\mathscr{D}(\Omega)}$ allora u è continua rispetto alla topologia da sottospazio di indotta da $\mathscr{E}(\Omega)$ su $\mathscr{D}(\Omega)$, ma allora lo è anche rispetto a quella da LF-spazi (infatti è lineare e ristretta ad ogni C_K^∞, con $K \in \mathscr{K}(\Omega)$ è continua, quindi si usa il Teorema 9.1.2 (5)). Inoltre osserviamo che per continuità esistono $C > 0$, $\{m_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{N}$ e $\{K_i\}_{i=1}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, t.c.

$$|\langle v, g\rangle| \leq C \max_{1\leq i\leq n} p_{m_i,K_i}(g) \ \ \forall g \in \mathscr{E}(\Omega)$$

ne segue che $\langle v, g\rangle = 0$ per ogni $g \in \mathscr{E}(\Omega)$ che si annulla su un intorno di $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$, da cui si deduce $u \in \mathscr{D}_c^*(\Omega)$. Infine notiamo che per l'unicità dell'estensione deve valere $j(u) = v$. □

Teorema 9.4.8: *Una $u \in \mathscr{D}_c^*(\Omega)$ ha ordine finito.*

Dimostrazione. Lo abbiamo già dimostrato, segue dall'eq. (9.6). □

Teorema 9.4.9 (Distribuzioni con supporto un punto): *Sia $u \in \mathscr{D}_c^*(\Omega)$ di ordine m t.c. $\mathscr{S}_u = \{p\}$, con $p \in \Omega$. Allora esistono $(c_\alpha)_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\|\alpha|\leq m}} \subset \mathbb{R}$ t.c.*

$$u = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\|\alpha|\leq m}} c_\alpha \partial^\alpha \delta_p = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\|\alpha|\leq m}} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_{\alpha,p}$$

Dimostrazione. Fissiamo $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c.

$$\partial^\alpha \phi(p) = 0 \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \ \ |\alpha| \leq m.$$

Dimostriamo che $\langle u, \phi\rangle = 0$. Preso $\varepsilon > 0$ esiste una palla compatta $\overline{B}(p, r) \subset \Omega$ t.c. per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| = m$ si abbia

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in \overline{B}(p, r). \tag{9.7}$$

Vediamo per induzione (dall'alto) che per ogni $x \in \overline{B}(p, r)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ vale

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq \varepsilon d^{m-|\alpha|} \|x - p\|^{m-|\alpha|}.$$

Per $|\alpha| = m$ si ha quanto voluto per l'eq. (9.7). Prendiamo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e supponiamo che la tesi valga per utti gli $\alpha \in \mathbb{N}^d$ con $|\alpha| = i$, inoltre fissiamo $\beta \in \mathbb{N}^d$ con $|\beta| = i - 1$. Allora per l'ipotesi induttiva si ha

$$\|\nabla \partial^\beta \phi(x)\| \leq d\varepsilon d^{m-i} \|x - p\|^{m-i} = \varepsilon d^{m-(i-1)} \|x - p\|^{m-i} \ \ \forall x \in \overline{B}(p, r)$$

ma allora, essendo $\partial^\beta \phi(p) = 0$, per il Teorema del valor medio si ha

$$|\partial^\beta \phi(x)| \leq \|x - p\| \varepsilon d^{m-(i-1)} \|x - p\|^{m-i} = \varepsilon d^{m-(i-1)} \|x - p\|^{m-(i-1)} \ \ \forall x \in \overline{B}(p, r)$$

che è quanto voluto.

Fissiamo adesso una funzione $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ t.c. $\psi = 1$ su un intorno di p ed il cui supporto sia contenuto in $\overline{B}(p, 1)$. Consideriamo per ogni $\rho > 0$ la funzione

$$\psi_\rho(x) = \psi(\rho^{-1} x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

e notiamo che se $\rho < r$ vale $\text{supp}(\psi_\rho) \subset \overline{B}(p, \rho) \subset \overline{B}(p, r)$. Dalla Formula di Leibniz (Proposizione 9.2.9) si ottiene

$$\partial^\alpha(\psi_\rho \phi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [\partial^{\alpha-\beta}\psi(\rho^{-1}x)\rho^{-(|\alpha|-|\beta|)}][\partial^\beta \phi(x)] \quad \forall x \in \overline{B}(p, \rho)$$

che, per $\rho < r < 1$ (posso prendere $r < 1$ a meno di rimpicciolirlo), porta a dire

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\psi_\rho \phi)(x) &\leq [2^{|\alpha|} \max_{\beta \leq \alpha}(r^{|\beta|-|\alpha|}\varepsilon d^{m-|\beta|} r^{m-|\beta|})] p_m(\psi) \\ &= [2^{|\alpha|} r^{m-|\alpha|} \varepsilon d^m] p_m(\psi) \\ &\leq [2^m \varepsilon d^m] p_m(\psi) = \varepsilon C_{d,m} p_m(\psi) \end{aligned}$$

da cui segue che per $\rho < r < 1$

$$p_m(\psi_\rho \phi) \leq \varepsilon C_{d,m} p_m(\psi).$$

Adesso ricordiamo che u ha ordine m, dunque chiamando $K = \overline{B}(p, r) \in \mathcal{K}(\Omega)$ si ha l'esistenza di una costante $C_K > 0$ t.c.

$$\langle u, f \rangle \leq C_K p_m(f) \quad \forall f \in C_K^\infty.$$

Essendo $\psi_\rho = 1$ su tutto un intorno aperto di p, dal Teorema 9.3.30 (1) e da quanto provato sopra, segue che per $\rho < r < 1$

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle u, \psi_\rho \phi \rangle| \leq C_K p_m(\phi_\rho \phi) \leq \varepsilon C_{d,m} C_K p_m(\psi)$$

che per $\varepsilon \searrow 0$ prova $\langle u, \phi \rangle = 0$, che era quanto volevamo.

Quanto provato implica che u è nulla sull'intersezione dei nuclei delle distribuzioni $\{(-1)^{|\alpha|} D_{\alpha,p}\}_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq m}}$. La tesi segue quindi dal Lemma 5.1.12. □

A

Spazi di Successioni

Cominciamo col ricordare le definizioni degli spazi (di Banach) che analizzeremo in quest'appendice.

Definizione A.0.1: (1) $\ell^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ limitata}\}$ con la norma del sup $\|.\|_\infty$;

(2) $\ell^1 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ con la norma $\|.\|_1$;

(3) $c_0 = \{x \in \ell^\infty \mid x_n \to 0\}$ con la norma $\|.\|_\infty$.

Può essere utile ricordare la definizione di $\ell^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$ dotato della norma $\|.\|_p$ data da $\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$ con $1 < p < \infty$, anche se nel seguito tratteremo principalmente dei tre spazi descritti sopra.

Proposizione A.0.2: *Valgono i seguenti fatti:*

(1) $(c_0)^*$ *è linearmente isometrico a* ℓ^1*;*

(2) $(\ell^1)^*$ *è linearmente isometrico a* ℓ^∞*.*

Dimostrazione. (1) Consideriamo la mappa $(c_0)^* \longrightarrow \ell^1$ data da $\alpha \mapsto \tilde{\alpha} = (\langle \alpha, e_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$. Notiamo che

$$\|\tilde{\alpha}\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle \alpha, e_k\rangle| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle \alpha, \theta_k e_k\rangle = \left\langle \alpha, \sum_{k\in\mathbb{N}} \theta_k e_k \right\rangle \le \|\alpha\| \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}} \theta_k e_k \right\|_\infty = \|\alpha\|$$

Inoltre abbiamo la mappa $\Psi : \ell^1 \longrightarrow (c_0)^*$ t.c. $f \mapsto \Psi_f$ con $\langle \Psi_f, x\rangle = \sum f_k x_k$ dove notiamo che la somma converge essendo assolutamente convergente in $\mathbb{K}$. Inoltre:

$$|\langle \Psi_f, x\rangle| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k x_k| \le \|f\|_1 \|x\|_\infty$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da Holder. In particolare troviamo che $\|\Psi_f\|_{c_0^*} \le \|f\|_1$ e quindi $\|\Psi\|_{op} \le 1$. Verificando che le due mappe sono l'una l'inversa dell'altra, poiché entrambe hanno norma ≤ 1, si ottiene che devono essere isometrie.

(2) Consideriamo ora invece la mappa $\Psi : \ell^\infty \longrightarrow (\ell^1)^*$ data da $f \mapsto \Psi_f$: t.c. $\langle \Psi_f, x\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k x_k$. Come prima si trova $|\langle \Psi_f, x\rangle| \leq \|f\|_\infty \|x\|_1$ e quindi $\|\Psi_f\|_{(\ell^1)^*} \leq \|f\|_\infty$. Ma vale l'uguaglianza in quanto:

$$\|\Psi_f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k x_k \right| \geq |f_k|$$

che passando al sup su k implica $\|\Psi_f\| \geq \|f\|_\infty$. Dunque la mappa è isometrica, e si verifica essere surgettiva in quanto data $\alpha \in (\ell^1)^*$ proviene da $f \in \ell^\infty$ definita da $f_k = \langle \alpha, e_k\rangle$.

□

Vale un risultato analogo che può essere dimostrato per esercizio.

Proposizione A.0.3: *$(\ell^p)^*$ linearmente isometrico a ℓ^q, dove $p, q \in (1, +\infty)$ sono coniugati.*

Ci possiamo chiedere se anche c_0 sia un duale. La risposta è: no.

Lemma A.0.4: *Sia $X \subset \ell^1$ di dimensione infinita. Vi sono allora una successione $(u_k)_{k\geq 0} \subset X$ e una successione strettamente crescente $(T_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{N}$ tali che:*

$$\begin{cases} \|u_k\|_1 = 1 \\ \|u_{k|[0,T_k]}\|_1 \leq \frac{3}{4} \\ u_{k+1|[0,T_k]} = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Definiamo induttivamente u_k e T_k. Per il caso $k = 0$ è sufficiente prendere u_0 un qualsiasi elemento di norma 1 e T_0 tale che

$$\sum_{j=0}^{T_k} |u_0(j)| \geq \frac{3}{4} \tag{A.1}$$

che esiste dato che tutta la serie ha somma 1. Supponiamo allora di essere arrivati a k e di voler definire u_k e T_k. Osserviamo che $\{u \in X | u_{\,|[0,T_k]} = 0\}$ ha codimensione finita, uguale a T_k, e dunque dimensione infinita (avendola infinita X). In particolare esiste $u \in X$ con $u_{\,|[0,T_k]} = 0$: basta allora normalizzarlo per ottenere u_{k+1}, e a questo punto si trova facilmente T_{k+1}. □

Lemma A.0.5: *Ogni sottospazio lineare chiuso di dimensione infinita di ℓ^1 contiene una copia omeomorfa (ma non necessariamente isometrica) di ℓ^1.*

Dimostrazione. Sia X il sottospazio in questione. Consideriamo allora la mappa lineare $L : \ell^1 \to X$, $\lambda \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u_k$ dove le u_i sono quelle definite prima. L è continua in quanto

$$\|L\lambda\|_1 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| \|u_k\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| = \|\lambda\|_1$$

e in particolare ha norma operatoriale ≤ 1. Ma anche $\forall \lambda \in \ell^1$ si ha

$$\|L\lambda\|_1 = \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}} (\lambda_k u_k \chi_{I_k} + \lambda_k u_k \chi_{I_k^c}) \right\|_1 \geq \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u_k \chi_{I_k} \right\|_1 - \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u_k \chi_{I_k^c} \right\|_1$$

dove $I_k = (T_{k-1}, T_k]$. Ma essendo allora gli I_k disgiunti si ha:

$$\|L\lambda\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\lambda_k u_k \chi_{I_k}\|_1 - \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u_k \chi_{I_k^c} \right\|_1 \geq \frac{3}{4} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| - \frac{1}{4} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| = \frac{1}{2} \|\lambda\|_1$$

Dunque $L : \ell^1 \to L(\ell^1) \subseteq X$ è continua di norma ≤ 1 con inversa continua di norma $\leq \frac{1}{2}$ e quindi risulta essere un omeomorfismo (non necessariamente un'isometria). $\square$

Proposizione A.0.6: *Lo spazio c_0 non è un duale.*

Dimostrazione. Per assurdo sia $c_0 \simeq X^*$ (e osserviamo che X deve avere dimensione infinita). Allora $X \hookrightarrow X^{**} \simeq c_0^* \simeq \ell^1$. Quindi a meno di isometrie possiamo pensare a X come contenuto in ℓ^1 e per il Lemma precedente dunque esiste una copia Y di ℓ^1 in X. Dunque

$$\ell^\infty \simeq Y^* \simeq \frac{X^*}{Y^\perp} \simeq \frac{c_0}{Y^\perp}$$

ma c_0 è separabile, e così ogni suo quoziente, mentre ℓ^∞ non lo è. $\square$

B

Sottogruppi Additivi di uno Spazio di Hilbert

I sottogruppi additivi di $\mathbb{R}^n$ chiusi e connessi sono esattamente i sottospazi lineari. La stessa cosa curiosamente non è vera in generale per spazi di Hilbert reali. Ma aumentando leggermente le ipotesi di regolarità sulla connessione del sottogruppo si riesce ad ottenere un criterio per stabilire quando un sottogruppo additivo di un generale spazio di Hilbert reale è un sottospazio lineare.

Lemma B.0.1: *Siano H uno spazio di Hilbert reale e $g_1, ..., g_n \in H$ con $\|g_i\| = a \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Consideriamo $G = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(g_1, ..., g_n)$ e $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(g_1, ..., g_n)$. Allora G è un $a\sqrt{n}$-rete su V.*

Dimostrazione. Consideriamo $d_G : V \to \mathbb{R}$ la funzione distanza da G. Notiamo che vale $d_G(x + g_i) = d_G(x) \ \forall x \in V \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Per $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con $2^{-1}G$ la rete che divide ogni tassello di G in più tasselli aggiungendo i punti intermedi di ogni lato della rete (in pratica aggiunge i punti medi di ogni lato della rete, il punto centrale di ogni faccia della rete ed il punto centrale di ogni tassello della rete). E così via definiamo ricorsivamente $2^{-n}G$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che G è una $\frac{a\sqrt{n}}{2}$-rete in $2^{-1}G$, infatti un punto di $2^{-1}G$ o sta sul bordo di un lato della rete generata da G e quindi la distanza tra quel punto e G è minore o uguale alla metà della lunghezza di quel lato, che a sua volta è minore uguale a $\frac{a\sqrt{n}}{2}$; oppure è un punto di G e va bene; oppure è un punto centrale di uno dei tasselli di G, ma in questo caso, notando che il tassello attorno all'origine (che è isometrico ad ogni altro tassello per traslazione) ha vertici $\{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_i\}_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n}$, per l'Identità del parallelogramma generalizzata (Proposizione 2.1.6), si ha che la media delle lunghezze al quadrato delle diagonali è uguale di $a^2 n$, ossia

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g_i = a^2 n$$

dunque deve essercene almeno una di lunghezza minore o uguale a $a\sqrt{n}$, dunque la distanza del centro del tassello da G sarà minore o uguale a $\frac{a\sqrt{n}}{2}$ come voluto. L'ultimo caso è quello in cui il punto sta nel centro di una delle facce del tassello, ma anche in questo caso ci va bene usando opportunamente l'Identità del parallelogramma generalizzata.

A questo punto possiamo dire che allora $2^{-k}G$ è una $\frac{a\sqrt{n}}{2^k}$-rete in $2^{-k+1}G$. Dunque preso $n \in \mathbb{N}$, un elemento di $2^{-n}G$ dista al più $a\sqrt{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}\right) \le a\sqrt{n}$ da qualche elemento di G. Ma notiamo che $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}G$ (per densità e chiusura), dunque ogni elemento di V dita al più $\sqrt{n}$ da un qualche elemento di G. $\square$

Teorema B.0.2: *Sia H uno spazio di Hilbert reale. Se $G \subset H$ è un sottogruppo additivo di H chiuso e connesso per archi α-hölderiani con $\alpha > \frac{1}{2}$, allora G è un sottospazio lineare.*

Dimostrazione. Siano $x \in G$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Basta provare che $\lambda x \in G$ (perché è già chiuso per somma). Sia $\gamma : [0,1] \to G$ α-hölderiana con $\gamma(0) = 0 \in G$ e $\gamma(1) = x$. Sia $n \in \mathbb{N}$, consideriamo i punti

$$g_k = \gamma\left(\frac{k}{n}\right) - \gamma\left(\frac{k-1}{n}\right) \quad \forall k \in \{1, ..., n\}$$

allora $\|g_{n,k}\| \leq Cn^{-\alpha}$ con $C > 0$ (supponendo che $\omega_\gamma(t) = Ct^\alpha$ si il modulo di continuità di γ) e quindi $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(g_{n,1}, ..., g_{n,n})$ è una ε-rete in $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(g_{n,1}, ..., g_{n,n})$ con $\varepsilon = Cn^{\frac{1}{2}-\alpha}$ per il Lemma B.0.1. Ma vale

$$x = \sum_{k=1}^{n} g_k \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(g_{n,1}, ..., g_{n,n})$$

dunque

$$\lambda x \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(g_{n,1}, ..., g_{n,n})$$

quindi dista al più $Cn^{\frac{1}{2}-\alpha}$ da qualche elemento di G e questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque $\lambda x \in G$ in quanto G è chiuso. □

C

Anagrammi Senza Lettere Fisse e Polinomi di Laguerre

Consideriamo la misura boreliana $\mu = e^{-x} d\mathcal{L}^1$ su $[0, +\infty)$. Ovviamente $\mathbb{C}[x] \subset L^2([0, +\infty), \mu)$, vediamo che inoltre $\mathbb{C}[x]$ è denso in $H = L^2([0, +\infty), \mu)$ dimostrando che se $H_0 = \overline{\mathbb{C}[x]}$ vale $H_0^{\perp} = \{0\}$, cioè $\forall u \in H$ se $(u \cdot x^n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $u = 0 \in H$.

Prendiamo dunque $u \in H$ t.c. $(u \cdot x^n) = \int_0^{+\infty} u(x) x^n e^{-x} dx = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} u(x)e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora $f \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx = \int_0^{+\infty} u(x)^2 e^{-2x} \, dx < +\infty$$
$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, dx = \int_0^{+\infty} |u(x)| e^{-x} \, dx \leq \|u\|_{L^2([0,+\infty))} \|e^{-x}\|_{L^2([0,+\infty))} < +\infty$$

quindi è ben definita la sua trasformata di Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Proviamo che $\hat{f} = 0$, da cui segue $f = 0$ dall'iniettività della trasformata. Proviamo che per $|t| < \frac{1}{2}$ la trasformata $\hat{f}(t)$ è nulla e che è analitica su tutto $\mathbb{R}$ da cui segue quanto voluto per il principio del prolungamento analitico. Sia $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < \frac{1}{2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u(x) e^{-x} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(itx)^k}{k!} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\int_0^{+\infty} u(x) x^k e^{-x} \, dx \right) \frac{i^k t^k}{k!} = 0 \end{aligned}$$

in cui la seconda uguaglianza è verificata in quanto per $|t| < \frac{1}{2}$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^{+\infty} |u(x)| \frac{|t|^k x^k}{k!} e^{-x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |u(x)| e^{x(|t|-1)} \, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |u(x)| e^{-\frac{x}{2}} \, dx < +\infty$$

quindi possiamo applicare il teorema di Fubini per scambiare serie ed integrale. Inoltre preso $t_0 \in \mathbb{R}$ e $|t| < \frac{1}{2}$ in modo molto simile si ottiene

$$\hat{f}(t_0 + t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} u(x) e^{it_0 x} e^{-x} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(itx)^k}{k!} \, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\int_0^{+\infty} u(x) x^k e^{it_0 x} e^{-x} \, dx \right) \frac{i^k t^k}{k!}$$

in cui ho potuto usare il teorema di Fubini per scambiare serie ed integrale per sostanzialmente la stessa ragione di prima, in quanto i conti necessari per farlo sono esattamente gli stessi. Dunque effettivamente $\hat{f}$ è analitica su tutto $\mathbb{R}$ ed è nulla per $|t| < \frac{1}{2}$, che è quanto volevamo.

Sono quindi ben definiti i polinomi ortonormali di μ, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che sono detti *polinomi di Laguerre*. Tali polinomi sono stranamente collegati al problema combinatorio del contare il numero di anagrammi senza lettere fisse di una data parola. Vediamo come. Fissiamo la notazione ed il modello che useremo

- Λ sarà un'insieme finito di simboli che rappresenterà il nostro alfabeto;
- I sarà un insieme finito di indici che rappresenterà le posizioni delle lettere nella parola;
- $\Lambda^I = \{p : I \to \Lambda \mid p \text{ funzione}\}$ rappresenterà l'insieme di tutte le possibili parole con $|I|$ lettere nell'alfabeto Λ;
- le permutazioni saranno rappresentate dall'azione del gruppo simmetrico $S_{|I|}$ su Λ^I data da

$$S_{|I|} \times \Lambda^I \ni (f, p) \longmapsto p \circ f \in \Lambda^I;$$

Fissata $p \in \Lambda^I$ consideriamo

$$\begin{aligned}
&A = A(p) = \{p \circ f \mid f \in S_{|I||}\}\\
&I_\lambda = I_\lambda(p) = p^{-1}(\lambda) = \{i \in I \mid p(i) = \lambda\}\\
&n_\lambda = n_\lambda(p) = |I_\lambda|\\
&A^* = A^*(p) = \{q \in A \mid q(i) \neq p(i) \ \ \forall i \in I\}
\end{aligned}$$

il nostro obbiettivo è calcolare $|A^*|$, in quanto questa quantità rappresenta proprio il numero di anagrammi della parola p senza lettere fisse. Un facile conto mostra che vale

$$|A| = \frac{|I|!}{\prod_{\lambda\in\Lambda} |I_\lambda|!}.$$

Per ogni $i \in I$ consideriamo

$$A_i = A_i(p) = \{q \in A \mid q(i) = p(i)\}$$

e notiamo che $A^* = A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. Utilizzando la formula d'inclusione-esclusione si ottiene

$$|A^*| = \sum_{J\subset I} (-1)^{|J|} |A_J|$$

in cui $A_J = A_J(p) = \bigcap_{i\in J} A_i = \{q \in A \mid q(i) = p(i) \ \ \forall i \in J\}$ $\forall J \subset I$. Ma un semplice conto mostra che

$$|A_J| = \frac{|I \setminus J|!}{\prod_{\lambda\in\Lambda} |I_\lambda \setminus J|!}$$

dunque notando che vale lo sviluppo

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i\in X_\lambda} c(\lambda, i) = \sum_{j\in\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda} \prod_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda, j_\lambda)$$

e che c'è una naturale bigezione tra $\mathcal{P}(I) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{P}(I_\lambda)$ data da

$$\mathcal{P}(I) \ni J \longleftrightarrow (J \cap I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{P}(I_\lambda)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
|A^*| &= \sum_{J\in\mathcal{P}(I)} (-1)^{|J|} \frac{|I\setminus J|!}{\prod_{\lambda\in\Lambda}|I_\lambda\setminus J|!} \\
&= \sum_{J\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{P}(I_\lambda)} (-1)^{\sum_{\lambda\in\Lambda}|I_\lambda|} \frac{(\sum_{\lambda\in\Lambda}|I_\lambda\setminus J_\lambda|)!}{\prod_{\lambda\in\Lambda}|I_\lambda\setminus J_\lambda|!} \\
&= \sum_{K\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{P}(I_\lambda)} (-1)^{\sum_{\lambda\in\Lambda}(|I_\lambda|-|K_\lambda|)} \frac{(\sum_{\lambda\in\Lambda}|K_\lambda|)!}{\prod_{\lambda\in\Lambda}|K_\lambda|!}
\end{aligned}$$

ma com'è ben noto vale $m! = \int_0^{+\infty} x^m e^{-x}dx \ \ \forall m \in \mathbb{N}$, dunque

$$\begin{aligned}
|A^*| &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{K\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{P}(I_\lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda} (-1)^{|I_\lambda|-|K_\lambda|} \frac{x^{|K_\lambda|}}{|K_\lambda|!} \right) e^{-x}\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \prod_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{J\subset I_\lambda} (-1)^{|I_\lambda|-|J|} \frac{x^{|J|}}{|J|!} \right) e^{-x}\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} p_{n_\lambda}(x) \right) e^{-x}\, dx
\end{aligned}$$

in cui il polinomio p_{n_λ} è un polinomio di grado n_λ e con coefficiente principale strettamente positivo per ogni $\lambda \in \Lambda$. Inoltre scelte comunque due lettere $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e considerato questo sottoproblema con due sole lettere otteniamo

$$\delta_{n_1,n_2} = |A^*_{\lambda_1,\lambda_2}| = \int_0^{+\infty} p_{n_{\lambda_1}}(x) p_{n_{\lambda_2}}(x) e^{-x}\, dx$$

e questo si ha per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, qualunque sia la cardinalità di Λ e per qualunque parola scelta (osserviamo che i polinomi p_{n_λ} non dipendono dalla cardinalità di Λ e non dipendono nemmeno dalla parola scelta). Dunque se $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}$, con $n \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} p_n(x) p_m(x) e^{-x}\, dx = \delta_{n,m} \ \ \forall n.m \in \mathbb{N}$$

e per la Proposizione 2.6.3 si ottiene che effettivamente

$$p_n(x) = L_n(x) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$|A^*(p)| = \int_0^{+\infty} \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} L_{n_\lambda(p)}(x) \right) e^{-x}\, dx$$

ed il legame anticipato tra questo problema ed i polinomi di Laguerre è adesso esplicito.

D

Teorema di Tychonov ed Equivalenza con l'Assioma della Scelta

D.1 Filtri e Ultrafiltri

Definizione D.1.1: Un *filtro* $\mathcal{F}$ su X è una famiglia di parti di X tale che:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- se $A, B \in \mathcal{F}$ allora anche $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, allora anche $B \in \mathcal{F}$.

Definizione D.1.2: Una *base di filtro* su X è $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che:

- $\forall B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset$;
- $\forall B, B' \in \mathcal{B}\ \exists\ B'' \in \mathcal{B}, B'' \subset B \cap \mathscr{B}'$.

Esempio D.1.3: (1) In uno spazio topologico, la famiglia di intorni di un punto forma un filtro e una base di intorni è esattamente una base di filtro;

(2) In $\mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{A^c \mid A \subset \mathbb{N} \text{ finito }\}$ è un filtro, detto filtro di Frechét;

(3) In generale se $A \subset X$, $\{B \supseteq A\}$ è un filtro, detto filtro principale generato da A.

Osservazione D.1.4: Data una base di filtro $\mathcal{B}$, l'insieme $\{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, B \subset F\}$ è un filtro, detto filtro generato da $\mathcal{B}$.

Definizione D.1.5: Dati due filtri $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ diciamo che $\mathcal{F}$ è *più fine* di $\mathcal{F}'$ se $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Due basi di filtro si dicono l'una più fine dell'altra se così sono i filtri che generano.

Osservazione D.1.6: (1) $\mathcal{B}'$ è più fine di $\mathcal{B}$ se $\forall B \in \mathcal{B}$ esiste $B' \in \mathcal{B}'$ con $B' \subseteq B$.

(2) In generale data una famiglia $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ di filtri esiste il minimo filtro contenente ogni $\mathcal{F}_i$ (scritto $\bigvee_{i \in I} \mathcal{F}_i$) se e solo se $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ha la proprietà dell'intersezione finita.

È possibile generare filtri anche tramite l'utilizzo di funzioni, partendo da un filtro dato. Cioè:

Definizione D.1.7: Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X, una $f : X \to Y$ genera un filtro $f(\mathcal{F})$ su Y, $f(\mathcal{F}) = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Se invece $\mathcal{G}$ è un filtro su Y e $g : X \to Y$ è surgettiva, allora è definito il filtro su X $g^{-1}(\mathcal{G})$ che ha per base $\{g^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{G}\}$.

Osservazione D.1.8: La verifica che le due famiglie così definite formano un filtro è una semplice applicazione della definizione. Inoltre si può osservare che $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$ se e solo se $\mathcal{G} \subseteq f(\mathcal{F})$.

Definizione D.1.9: Data una famiglia $\{\mathcal{F}_i\}$ di filtri sugli insiemi X_i, è possibile considerare il filtro $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i := \bigvee p_i^{-1}(\mathcal{F}_i)$ sul prodotto $\prod_{i\in I} X_i$

Si può mostrare che $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ è il minimo filtro $\mathcal{F}$ sul prodotto tale che $\forall i\ p_i^{-1}(\mathcal{F}_i) \subseteq \mathcal{F}$.

Cominciamo ad applicare questi strumenti al contesto topologico.

Definizione D.1.10: Sia X spazio topologico. Diciamo che un filtro $\mathcal{F}$ su X converge a $x \in X$ se $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ dove $\mathcal{U}_x$ è il filtro degli intorni di x, ossia se $\forall U \in \mathcal{U}_x\ \exists F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subseteq U$.

Definizione D.1.11: Diciamo che x è un punto aderente a $\mathcal{F}$ se $\forall U \in \mathcal{U}_x, \forall F \in \mathcal{F}, U \cap F = \emptyset$

Equivalente: $\forall F \in \mathcal{F}, x \in \overline{F}$, ovvero $x \in \bigcap \overline{F}$.
Equivalentemente: esiste il filtro $\mathcal{F} \vee U_x$.
Equivalentemente: $\mathcal{F}$ ha un raffinamento convergente a x.

Lemma D.1.12: *Una funzione $f : X \to Y$ fra spazi topologici è continua in x se e solo se $\mathcal{U}_y \subseteq f(\mathcal{U}_x)$ o $f(\mathcal{U}_x)$ converge a $f(x)$.*

Proviamo ora ad esprimere la compattezza topologica in termini di filtri. Facciamolo partendo dalla definizione.

Uno spazio topologico X è compatto secondo Heine-Borel se da ogni suo ricoprimento aperto se ne può estrarre uno finito. Questo sappiamo tradursi nella condizione sui chiusi: X è compatto se data una qualsiasi famiglia di chiusi $\{F_i\}_{i\in I}$ con intersezioni finite tutte non vuote (Proprietà dell'Intersezione Finita, PIF), si ha $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Proposizione D.1.13: *X compatto se e solo se ogni filtro ha almeno un punto aderente.*

Dimostrazione. Se X è compatto, dato un filtro $\mathcal{F}$, considero la famiglia di chiusi $\{\bar{F}\}_{F\in\mathcal{F}}$: essendo il filtro chiuso per intersezione e $\emptyset \notin \mathcal{F}$, si ha che la famiglia ha la PIF. Per compattezza allora $\exists x \in \bigcap \bar{F}$, che è come dire che x è aderente a $\mathcal{F}$.
Viceversa, se $\{F_i\}$ è una famiglia di chiusi con la PIF, si può verificare che è una prebase di un filtro, e dunque ha intersezione non vuota (il punto aderente sta nell'intersezione, per chiusura). □

Una applicazione banale del lemma di Zorn ci dice che ogni filtro si estende ad un filtro massimale (per inclusione), detto *ultrafiltro*. Ricordiamo inoltre (o può essere un facile esercizio sulle definizioni per chi non lo sapesse) che un filtro $\mathscr{F}$ su un insieme X è un ultrafiltro se e solo se per ogni sottoinsieme A di X, o A o A^c sta in $\mathcal{F}$.

Introduciamo dunque gli ultrafiltri nel nostro discorso sulla compattezza.

Proposizione D.1.14: *X è compatto se e solo se ogni ultrafiltro è convergente*

Dimostrazione. Si è visto che richiedere la compattezza è equivalente a richiedere che ogni filtro ammetta un punto ad esso aderente, che si è detto voler dire che il filtro ammette un raffinamento convergente a tale punto. Passando all'ultrafiltro si ha la tesi. □

Proposizione D.1.15: *Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X e $f : X \to Y$. Allora $f(\mathcal{F})$ è un ultrafiltro su Y.*

Dimostrazione. Mostriamo che dato un insieme $A \subseteq Y$, $A \in f(\mathcal{F})$ oppure $A^c \in f(\mathcal{F})$.

$$A \in f(\mathcal{F}) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (f^{-1}(A))^c \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow f^{-1}(A^c) \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \notin f(\mathcal{F}) \tag{D.1}$$

dove si è usata la massimalità di $\mathcal{F}$ e che $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$. □

D.2 Teorema di Tychonov ed AC

Osservazione D.2.1: Data una famiglia di spazi topologici X_i indicizzata su I, un filtro $\mathcal{F}$ su $\prod_{i\in I} X_i$ converge a $x = (x_i)$ se e solo se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}_x = \prod_{i\in I} \mathcal{U}_{x_i}$. Questo si traduce dicendo che $\forall i$ $\mathcal{F} \supseteq p_i^{-1}(\mathcal{U}_{x_i})$ o equivalentemente $\forall i\, \mathcal{U}_{x_i} \subseteq p_i(\mathcal{F})$.

Quindi $\mathcal{F}$ converge a x se e solo se $p_i(\mathcal{F})$ converge a x_i per ogni i.

Come per magia, risulta ora quasi immediata la dimostrazione del teorema di Tychonov.

Teorema D.2.2 (di Tychonov): *Il prodotto di spazi topologici compatti $\{X_i\}_{i\in I}$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un filtro sul prodotto; per quanto detto basta mostrare che converge a qualche x. $p_i(\mathcal{F})$ risulta essere un ultrafiltro su X_i per ogni $i \in I$; per compattezza allora $p_i(\mathcal{F})$ converge a un qualche x_i per ogni $i \in I$. Ma per l'osservazione precedente questo si traduce con la convergenza di $\mathcal{F}$ a $x = (x_i)_{i\in I}$. □

Per concludere la sezione, vediamo il famoso legame che c'è fra Tychonov e l'assioma di scelta.

Teorema D.2.3: *Il teorema di Tychonov è equivalente all'assioma di scelta (AC).*

Dimostrazione. Una freccia si è già vista (ricordiamo che AC (o Zorn) implica il teorema dell'ultrafiltro, ossia che ogni filtro si estende a un ultrafiltro), avendo usato nella dimostrazione di Tychonov, seppur implicitamente, AC.

Mostriamo il viceversa. Siano S_i insiemi non vuoti indicizzati su I: si vuole trovare una funzione $f : I \to \bigcup_{i\in I} S_i$ tale che per ogni $i \in I$, $f(i) \in S_i$. Poniamo $X_i = S_i \cup \{i\}$ (possiamo supporre $i \notin S_i$) su cui mettiamo la topologia $\{\emptyset, \{i\}, S_i, X_i\}$: X_i risulta dunque ovviamente compatto e per Tychonov allora sarà compatto anche $\Pi_{i\in I} X_i$.

Consideriamo quindi i chiusi $p_i^{-1}(S_i)$, che sono gli insiemi delle f tali che $f_i \in S_i$, ossia le funzioni che fanno "almeno una scelta giusta". Questi formano una famiglia di chiusi con la PIF (convincersene!) e dunque per compattezza hanno intersezione non nulla: ma una funzione nell'intersezione è esattamente una funzione di scelta. □

Bibliografia

[1] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Elsevier, 1979.

[2] W. Rudin. *Functional Analysis*. International Series in Pure e Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[3] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[4] J. Horváth. *Topological Vector Spaces and Distributions*. Courier Corporation, 2012.